

madsage  
IRan Education  
Research  
NETwork  
(IRERNET)

شبکه آموزشی - پژوهشی مادسیج  
با هدف بیبود پیشرفت علمی  
و دسترسی راحت به اطلاعات  
بزرگ علمی ایران  
ابعاد شده است

## مادسیج

شبکه آموزشی - پژوهشی ایران

**madsg.com**  
مادسیج

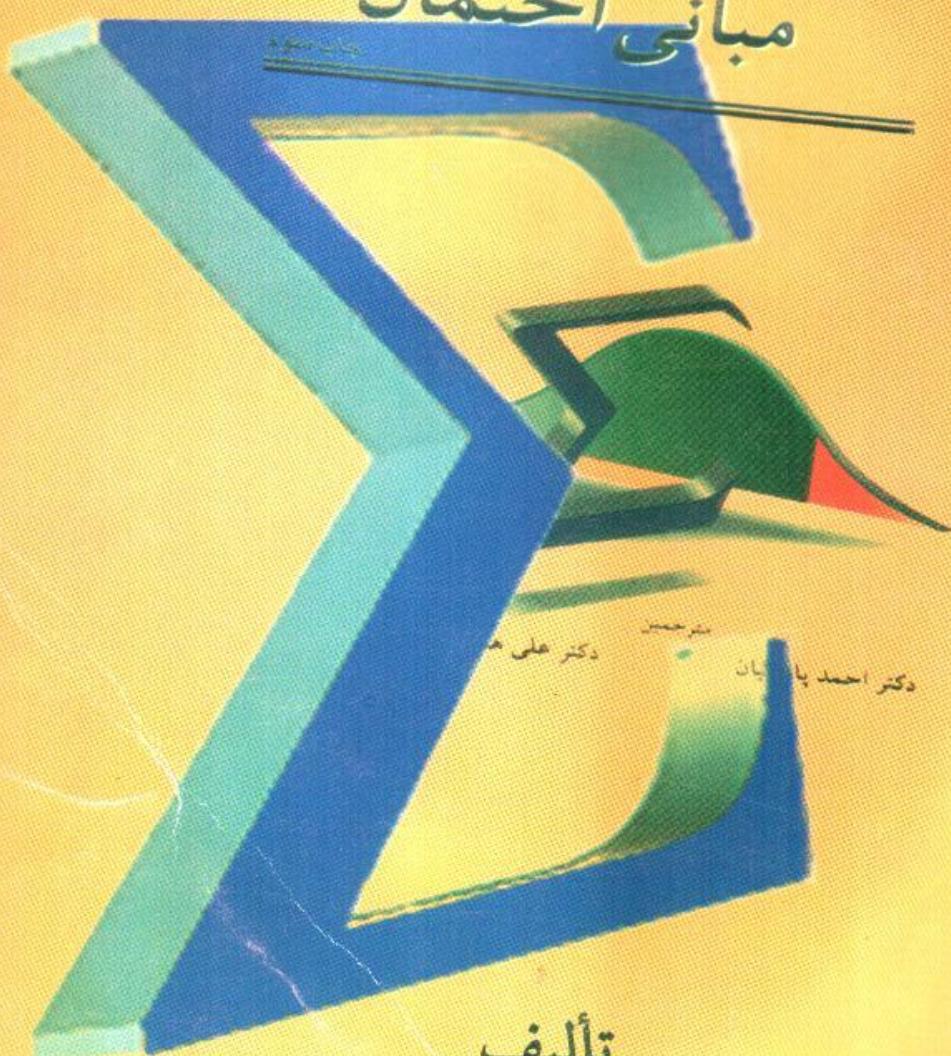


نویسنده: شلدون راس

# حل المسائل: مبانی احتمال

نویسنده: شلدون راس

## مبانی احتمال



تألیف

احسان منصوری

مهندس عبدالحسین خدایوندی

(عضو هیئت علمی دانشگاه بوقعی سینا)

فهرست

۱	آنالیز ترکیباتی	فصل اول
۱۴	اصول احتمال	فصل دوم
۳۳	احتمال شرطی و استقلال	فصل سوم
۶۱	متغیرهای تصادفی	فصل چهارم
۹۰	متغیرهای تصادفی پیوسته	فصل پنجم

غلط نامه

درست	سؤال	صفحة
$\binom{20}{2} = 190$	۱۳	۶
$\left[ \binom{v}{r} \binom{a}{r} + \binom{b}{r} \binom{y}{r} + \binom{c}{r} \binom{d}{r} \right] = 500$	۱۷ قسمت (ج)	۷
$\frac{8!}{64}$	۱۰	۱۹
$p(k) = \frac{A}{(b+g)!} / b! g!$	۱۹	۲۴
$1 - \left( \frac{25}{36} \right)^n \geq \frac{1}{2}$	۳۰	۲۸
اگر در اتفاقی ۱۲ نفر باشند، احتمال اینکه هیچ‌کدام آنها روز	۳۵	۲۹
$2^5 \binom{10}{1} \binom{9}{6}$	۴۰ قسمت (ب)	۳۱
$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$	۲۴ قسمت (ب)	۴۱
$\frac{\binom{r}{5} \cdot \binom{1}{4}}{\binom{r}{5} \cdot \binom{1}{4} + \binom{r}{6} \cdot \binom{1}{4}}$	۲۸	۴۳
$p_1 p_2 p_3 + p_2 p_4 p_5$	۵۷ قسمت (الف)	۵۳
$+ p_1 p_2 p_5 + p_2 p_3 p_4$	۵۷ قسمت (ب)	۵۴
$\frac{18 \cdot (12)^{N-1}}{(25)^N}$	۷۳	۸۸
$p\{x > c\} = .11$	۱۹	۱۰۰
$\mu = ۷۱$	۲۱	۱۰۱

## فصل اول

# آنالیز توکیباتی

۱- الف) چند پلاک نمره ۷ رقمی اتومبیل را می توان تهیه نمود وقتی که دو رقم اول آن از حروف لاتین و ۵ رقم باقیمانده از اعداد باشد.

ب) قسمت (الف) را با فرض اینکه هیچ دو حرف یا دو عددی نباید در یک سرمه تکرار شود، پاسخ دهید.

الف) چون حروف لاتین شامل ۲۶ حرف میباشد داریم:

$$\frac{26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}$$

ب) بدلیل اینکه در قسمت ب تکرار مجاز نیست لذا:

$$\frac{26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}$$

۲- چهار فرد، D,C,B,A یک گروه موسیقی مرکب از ۴ وسیله موسیقی را تشکیل داده اند. اگر هر کدام بتوانند هر ۴ وسیله را بتوانند، چند ترتیب متفاوت وجود دارد؟ در صورتیکه فرد A و فرد B بتوانند هر ۴ وسیله را بتوانند ولی فرد C و فرد D هر کدام بتوانند پیانو و طبل بتوانند آنگاه چند ترتیب متفاوت وجود دارد؟

الف) چهار فرد و چهار وسیله موسیقی داریم:

$$\frac{4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1}{\text{حالت اول} \quad \text{حالت دوم} \quad \text{حالت سوم} \quad \text{حالت چهارم}} = (4!) \times (4!)$$

ب) اگر ترتیب قرار گرفتن افراد مدنظر نباشد داریم.

ج) فرد A و B هر چهار وسیله و فرد C و D فقط طبل و پیانو در این حالت باید فرد A و فرد B متنظر باشند که مرد C و D وسایل خود را انتخاب کنند پس داریم:

اگر فرد C طبل را بردارد فرد D پیانو را بر میدارد و بر عکس و از دو وسیله باقیمانده

$$\frac{C \quad D \quad A \quad B}{2 \times 1 \times 2 \times 1} \text{ یکی را A و دیگری را B بر می دارد.}$$

۳- کدیین شهری تلفن در آمریکا و کانادا از سه عدد تشکیل شده است که عدد اول آن بین ۲ و ۹، عدد دوم آن ۰ یا ۱ و عدد سوم آن هر عددی بین ۱ و ۹ است. چند کد بین شهری تلفن می توانند وجود داشته باشند؟ چند تا از کدها با عدد ۴ شروع شده اند؟

۳

آنالیز ترکیباتی

حل المسائل - مبانی احتمال

$$8 \times 2 \times 9 = 144$$

الف)

ب) در حالت دوم رقم اول باید ۴ باشد:

۴ - پک سرود معروف کودکستان دارای اشعار زیر است.

$$9 \times 2 \times 1 = 18$$

همین طور که در حال رفتن به کودکستان بودم،

مردی را با هفت فرزند ملاقات کردم،

هر فرزند ۷ ساک دستی داشت،

در هر ساک ۷ گربه بود،

هر گربه ۷ بچه گربه داشت.

چند بچه گربه توسط کودک دیده شده است؟

به راحتی می توان گفت:

$$(7 \text{ بچه گربه}) \times (7 \text{ گربه}) \times (7 \text{ ساک}) \times (7 \text{ فرزند}) = 2401$$

۵ - اگر ۴ آمریکایی، ۳ فرانسوی و ۲ انگلیسی بخواهند در یک ردیف بنشینند و

ملیت های یکسان پهلوی هم باشند، به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

هر کدام از ملیت ها را یک دسته کرده و کنار هم می گذاریم:

$$(4!) \times (3!) \times (3!)$$

اما چون ترتیب قرار گرفتن آنها نیز مهم است داریم:

$$3! \times [ (4!) \times (3!) \times (3!) ] = 5184$$

۶ - الف) به چند طریق ۳ پسر بچه و ۳ دختر بچه می توانند در یک ردیف بنشینند؟

ب) به چند طریق ۲ پسر بچه و ۳ دختر بچه می توانند در یک ردیف بنشینند اگر لازم باشد

پسر بچه ها پهلوی هم و دختر بچه ها نیز پهلوی هم باشند؟

ج) پاسخ قسمت (الف) وقتی که لازم باشد پسر بچه ها پهلوی هم بنشینند چیست؟

د) پاسخ قسمت (الف) وقتی که بنا باشد افراد همجنس پهلوی هم ننشینند چیست؟

الف) چون جنسیت برای ما مهم نیست پس هر ۶ نیکسان هستند.

$$6! = 720$$

ب) پسرها را یک دسته و دخترها را نیز یک دسته در نظر می‌گیریم:

$$2! \times [3! \times 3!] = 72$$

ج) پسرها را یک دسته گرفته و دراین صورت چهارشنبه یکسان داریم:

$$4! \times 3! = 144$$

د) دو حالت ممکن است رخداد که مجموع این حالات جواب مسئله خواهد

بود:

$$36 = 1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 3 : \text{حالت اول}$$

$$\Rightarrow 72 = 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 3 : \text{حالت دوم}$$

۷- چند ترتیب متفاوت از حروف کلمه های زیر می‌توان تهیه نمود؟

الف) MISSISSIPPI (d) PROPOSE (b) FLUKE (c)

الف) ۱ ب) چون دو حرف تکراری داریم و جابجاگی آنها تأثیری ندارد:  $\frac{7!}{2! \times 2!}$

$$7) \quad \frac{7!}{2! \times 2!} \quad d) \quad \frac{11!}{4! \times 4! \times 2!}$$

۸- کودکی ۱۲ مکعب دارد که ۶ تایی آنها سیاه، ۴ تا قرمز . یکی سفید و یکی آبی است اگر

او بخواهد مکعب ها را در یک ردیف قرار دهد چند ترتیب متفاوت امکان پذیر است؟

چون تفاوتی بین مکعب های سیاه با هم و مکعب های قرمز با هم وجود ندارد پس :

$$\frac{12!}{6! \times 4!} = 27720$$

۹- به چند طریق ۸ نفر می‌توانند در یک ردیف بنشینند اگر،

الف) هیچ محدودیتی در نشستن آنها وجود نداشته باشد

ب) فرد A و فرد B باید پهلوی هم بنشینند.

ج) ۴ مرد و ۴ زن باشند و هیچ دو مرد و یا دو زنی نتوانند پهلوی هم بنشینند.

## حل المسائل - مبانی احتمال

## آنالیز ترکیباتی

۵

د) ۵ مرد باشند و باید پهلوی هم بنشینند.

ه) ۴ زوج باشند و باید هر زوج پهلوی هم بنشینند.

الف)  $8! \times 7! \times 6!$       ب)  $1152$       ج) مانند حالت چهارم مسأله ۶ داریم:د)  $4! \times 5!$       ه) چهار زوج را می توان ۴ شیء در نظر گرفت که ترتیب قرار گرفتن آنها عبارتست از :  $4!$ 

اما چون ترتیب قرار گرفتن زن و مرد هم مهم است پس داریم:

$$4! \times [2! \times 2! \times 2! \times 2!] = 384$$

۱۰- به چند طریق می توان ۳ کتاب داستان ، ۲ کتاب ریاضی و یک کتاب شیمی را در یک قفسه کتاب به ترتیب پهلوی هم قرار داد بطوریکه،  
الف) کتابها بدون هیچ محدودیتی چیده شوند.

ب) کتابهای ریاضی پهلوی هم و کتابهای داستان نیز پهلوی هم باشند.

ج) کتابهای داستان پهلوی هم باشند و سایر کتب محدودیتی نداشته باشند.

الف)  $6! \times 2! \times 3! \times 3!$       ب)  $4! \times 3!$       ج)  $10!$ ۱۱- یک رئیس ، یک خزانه دار و یک منشی که افراد متفاوتی هستند را از یک مجموعه ۱۰ نفری انتخاب می کنیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است اگر،  
الف) هیچ محدودیتی نباشد.

ب) A و B با هم انتخاب نشوند.

ج) C و D با هم انتخاب شوند و یا هیچکدام انتخاب نشوند.

د) E حتماً انتخاب شود.

ه) F فقط در صورتیکه رئیس باشد انتخاب شوند.

الف) چون می خواهیم یک مجموعه ۳ عضوی را از یک مجموعه ۱۰ عضوی جدا کنیم

$$\text{پس ترکیب است و داریم: } 120 = \binom{10}{3} \text{ لذا: } 720 = 120 \times 3!$$

ب) تعداد حالات انتخاب هیچکدام  $\binom{8}{3}$  و فقط A  $\binom{8}{2}$  و فقط B  $\binom{8}{1}$

ع  
فصل اول - مبانی احتمال  
حل المسائل - مبانی احتمال

$$\frac{8}{3} + \frac{8}{2} + \frac{8}{2} = 112 \rightarrow \text{چون افراد متفاوتی هستند} - 672 - (112) (3!)$$

$$\text{ج) } 384 - (3!) (64) \rightarrow \text{چون متفاوت هستند} = 64 = \text{هیچکدام } \left(\frac{8}{1}\right) \text{ هر دو}$$

۱۲- ۵ جایزه جداگانه (بورس تحصیلی و ...) به گروهی منتخب از دانشجویان یک کلاس ۳۰ نفری اهدا می شود . این کار به چند طریق امکان پذیر است اگر .

الف) یک دانشجو بتواند به هر تعداد جایزه بگیرد؟

ب) یک دانشجو بتواند حداقل یک جایزه بگیرد؟

$$30^5 = 2430000 \quad \text{الف) چون جایزه ها باهم متفاوت هستند لذا داریم .}$$

$$30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 = 17100720 \quad \text{ب) گرفتن حداقل یک جایزه :}$$

۱۳- یک گروه ۲۰ نفری را در نظر بگیرید . اگر فرد بخواهد با افراد دیگر دست بدهد به چند طریق دست دادن امکان پذیر است؟

(۱۹!) برای درک مساله می توانید یک گروه ۲ یا ۴ نفره را در نظر بگیرید اما دقت کنید که هر دو نفر فقط یکبار با هم دست می دهند .

\* - ۱۴

۱۵- شورایی مشکل از ۷ نفر که ۲ نفر آنها جمهور بخواه . ۲ نفر دمکرات و ۳ نفر مستقل هستند را از یک گروه مشکل از ۵ جمهور بخواه . ۶ دمکرات و ۴ مستقل انتخاب می کنیم این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

$$\binom{5}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{3}$$

۱۶- دانشجویی در یک امتحان بایستی به ۷ سوال از ۱۰ سوال پاسخ دهد . او به چند طریق می تواند سوالها را انتخاب کند؟ اگر لازم باشد به ۳ سوال از ۵ سوال اول پاسخ دهد در این صورت به چند طریق امکان پذیر است؟

$$\text{الف) انتخاب یک مجموعه ۷ تایی از یک مجموعه ۱۰ تایی .} \quad \binom{10}{7} \quad \text{ب) } \binom{5}{3} \times \binom{5}{4}$$

## حل المسائل - مبانی احتمال

## آنالیز ترکیباتی

۷

۷- از گروهی مشکل از ۸ زن و ۶ مرد شورایی مرکب از ۳ زن و ۳ مرد بایستی تشکیل شود، این کار به چند طریق امکان پذیر است هر گاه.

الف) ۲ نفر از مردها نخواهند با هم انتخاب شوند؟

ب) ۲ نفر از زنها نخواهند با هم انتخاب شوند؟

ج) یکی از مردها و یکی از زنها نخواهند با هم انتخاب شوند؟

الف) در انتخاب زنها هیچ محدودیتی وجود ندارد و اگر دو نفر از مردها نخواهند با هم

انتخاب شوند داریم:

$$\binom{8}{3} \times \left[ \binom{2}{0} \binom{4}{2} + \binom{2}{1} \binom{4}{1} \right] = 896$$

مردها  
زنها

$$\binom{6}{3} \times \left[ \binom{2}{0} \binom{6}{2} + \binom{2}{1} \binom{6}{1} \right] = 700$$

مردها  
زنها

(ب)

ج) یکبار مرد مورد نظر را از انتخابات خارج و یکبار زن مورد نظر را از انتخابات خارج و

$$\left[ \binom{8}{3} \binom{5}{2} \right] + \left[ \binom{6}{3} \binom{7}{2} \right] + \left[ \binom{7}{2} \binom{5}{3} \right] = 161$$

یکبار هم هر دو را خارج می کنیم

مرد زن      زن مرد      مرد زن

۱۸- فردی ۸ دوست دارد که می خواهد ۵ نفر آنها را به یک میهمانی دعوت کند. چند انتخاب وجود دارد.

الف) اگر دو نفر از دوستان وی با هم اختلاف داشته باشند و نخواهند با هم شرکت کنند؟

ب) اگر دو نفر از دوستان وی در صورتیکه با هم دعوت شوند در میهمانی شرکت کنند؟

$$\binom{2}{0} \binom{6}{5} + \binom{2}{1} \binom{6}{4} = 36$$

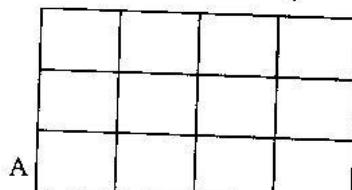
الف)

$$\binom{2}{0} \binom{6}{5} + \binom{2}{2} \binom{6}{3} = 36$$

ب)

A - ۱۹- مجموعه ای از نقاط را بصورت شکل زیر در نظر بگیرید . فرض کنید از نقطه A شروع کرده و در هر حرکت می توانید بطرف بالا یا بطرف راست یک قدم بردارید . اگر این حرکت ادامه یابد تا به نقطه B برسید در این صورت چند مسیر از A به B امکان پذیر است؟

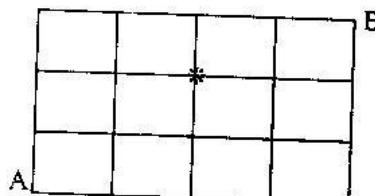
راهنمایی : توجه کنید که برای رفتن از نقطه A و رسیدن به نقطه B بایستی ۴ قدم بطرف راست و ۳ قدم به طرف بالا برداشته شود .



\* مجموعاً ، ۷ مسیر برای آرسیدن به B وجود دارد که همواره ۲ مسیر عمودی و ۴ مسیر افقی خواهد بود و چون انتخاب مسیرهای افقی هیچ فرقی سا هم ندارد و انتخاب مسیرهای عمودی نیز هیمنظور است پس داریم :

$$\frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

B - ۲۰- در مساله ۱۹ چند مسیر از A به B وجود دارد در صورتیکه مسیر از نقطه مشخص شده در شکل بگذرد؟



در این مساله چون باید از نقطه مشخصی عبور کنیم پس داریم :  $18 = \frac{(4!)(3!)}{2! \times 2!}$

C - ۲۱- یک آزمایشگاه روانسنجی از ۳ قسمت که در هر قسمت ۲ تخت وجود دارد تشکیل شده است . اگر ۲ جفت دو قلو یکسان را بخواهیم در این مرکز بستری کنیم بطوریکه هر جفت دوقلو در یک قسمت روی تخت های متفاوت بستری شوند . این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

۲۲- عبارت  $(3x^2 + y)^5$  را بسط دهید.

براساس بسط دو جمله‌ای داریم:

$$(3x^2 + y)^5 = \binom{5}{0}(3x^2)^0 \cdot (y)^5 + \binom{5}{1}(3x^2)^1 \cdot y^4 + \binom{5}{2}(3x^2)^2 \cdot y^3$$

$$+ \binom{5}{3}(3x^2)^3 \cdot y^2 + \binom{5}{4}(3x^2)^4 \cdot y + \binom{5}{5}(3x^2)^5 \cdot y^0$$

$$(3x^2 + y)^5 = y^5 + 15x^2y^4 + 90x^4y^3 + 270x^6y^2 + 405x^8y + 243x^{10}$$

\* - ۲۳

\* - ۲۴

۲۵- به چند طریق می‌توان ۱۲ نفر را در سه شورای متفاوت با تعداد اعضای ۳ و ۴ و ۵ تقسیم نمود؟

از فرمول گروههای مجزا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\binom{12}{5,4,3} = \frac{12!}{5! \times 4! \times 3!} = 27720$$

۲۶- پدری می‌خواهد ۷ هدیه را بین سه فرزندش توزیع کند بقسمی که فرزند بزرگتر ۳ هدیه و دو نفر دیگر هر کدام ۲ هدیه دریافت دارند. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

$$\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = 210$$

همانند مسئله قبلی داریم:

۲۷- اگر بخواهیم ۸ تخته سیاه یکسان را بین ۴ مدرسه تقسیم کنیم، به چند طریق این کار

فصل اول

حل المسائل - مبانی احتمال

۱.

امکان پذیر است؟ چنانچه به هر مدرسه لازم باشد یک تخته داده شود در این صورت به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

چون تخته سیاه هایکسان هستند مانند مساله توزیع تویها در طرف داریم:

$$\frac{\text{تخته سیاه}}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} = 8$$

$$\binom{8-1}{4-1} = 20 \quad \text{ب)$$

$$\binom{8+4-1}{4-1} = 160 \quad \text{الف)$$

۲۸- اگر بخواهیم ۸ معلم جدید را بین ۴ مدرسه تقسیم کنیم، به چند طریق مختلف این کار امکان پذیر است؟ چنانچه به هر مدرسه لازم باشد دو معلم اختصاص داده شود آنگاه به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

الف - چون معلمها نمی توانند یکسان باشند پس داریم :

$$\binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = 2020$$

- ب

۲۹- یک آسانسور از طبقه همکف با ۸ مسافر (بدون مسؤول آسانسور) حرکت کرده و تاطیقه ششم همه را پیاده می کند. اگر مسافران از نظر مسؤول آسانسور یکسان باشند به چند طریق مختلف می تواند شاهد پیاده شدن مسافران باشد؟ اگر ۵ نفر از مسافران مرد و ۳ نفر زن باشند و مسؤول آسانسور بتواند مرد و زن را تشخیص دهد آنگاه به چند طریق ممکن شاهد پیاده شدن مسافران خواهد بود؟

الف - همانند توزیع تویها در طرفها داریم :

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_6}{\text{مسافر}} = 8$$

$$\binom{8+6-1}{6-1} = 1287$$

۱۱

آنالیز ترکیباتی

حل المسائل - مبانی احتمال

ب - در این حالت یکبار مرد را در نظر گرفته و بار دیگر زنها را در نظر می گیریم:

$$\left[ \binom{5+6-1}{6-1} \right] \left[ \binom{3+6-1}{6-1} \right] = 14112$$

$$x_1 + \dots + x_5 = 5$$

$$x_1 + \dots + x_6 = 3$$

۳۰ - در یک حراج مجموعه هنری ۴ اثر از دالیز، ۵ اثر زون گوک و ۶ اثر از پیکاسو وجود دارد و هر ۵ نفر خریدار همه این آثار هستند. اگر حبرگار روزنامه فقط تعداد هر اثر خریداری شده توسط هر خریدار را گزارش بدهد به چند طریق مختلف می توان نتیجه را گزارش داد؟

چون اثر هنرمندان با هم متفاوت است داریم:

آنثار خریدار

$$\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4\}$$

$$\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5\}$$

$$\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6\}$$

$$\Rightarrow \binom{4+5-1}{5-1} \binom{5+5-1}{5-1} = 1802200$$

۳۱ - وزنه بردار در یک مسابقه شرکت دارند که

۳ نفر از آنها آمریکایی، ۴ نفر روسی، ۲ نفر چینی و یک نفر کانادایی هستند. اگر امتیاز کسب شده به نام کشور وزنه بردار ثبت شود چند نتیجه ممکن است از نظر امتیاز بتواند وجود داشته باشد؟ چنانچه آمریکا یک وزنه بردار در سه نفر اول و ۲ وزنه بردار در سه نفر آخر داشته باشد آنگاه نتایج ممکن به چند صورت خواهد بود؟

الف - اگر نتایج براساس ملیت باشد پس هر کدام از ورده بردارها از کشور مورد نظر که

مقام بیاورند فرقی نمیکند لذا:

$$\frac{10!}{4!3!2!} = \binom{10}{4,3,2} = 12600$$

ب - اول دوم سوم ... هشتم نهم دهم . وزنه برداری که در سه نفر اول است ممکن است اول، دوم و یا سوم شود یعنی ۳ حالت دارد و دو وزنه برداری که در ۳

نفر آخر هستند اولی ۳ حالت و دومی ۲ حالت خواهد داشت و چون ترتیب آنها مهم نیست و ملیت آنها مطرح است نصف این حالات مد نظر خواهد بود.

$$\frac{3 \times 2}{3} \times \frac{7!}{2!} = 945$$

۳۲- نمایندگان ۱۰ کشور از جمله روسیه، فرانسه، انگلیس و آمریکا باید در یک ردیف قرار گیرند. چنانچه نمایندگان فرانسه و انگلیس بخواهند بهلوی هم باشند و نمایندگان روسیه و آمریکا هم بخواهند بهلوی هم نباشند، به چند طریق این کار امکان پذیر است؟ نمایندگان فرانسه و انگلیس را یک دسته و نمایندگان روسیه و آمریکا را نیز یک دسته در نظر می‌گیریم:

$$2! \times 9! = \text{تعداد حالات کنار هم بودن فرانسه و انگلیس}$$

$$2! \times 2! \times 8! = \text{تعداد حالات پهلوی هم بودن فرانسه و انگلیس و آمریکا و روسیه}$$

$$564480 = 2! \times 2! \times 8! - (2! \times 2! \times 9!) = \text{تعداد حالات مورد نظر} \Rightarrow$$

۳۳- می خواهیم ۲۰ میلیون ریال پول را در ۴ فعالیت اقتصادی سرمایه گذاری کنیم. هر سرمایه گذاری بایستی مضری از یک میلیون ریال بوده و چنانچه بخواهیم در این فعالیت‌ها سرمایه گذاری کنیم لازم است حداقل سرمایه گذاری ۲ و ۲ و ۲ و ۴ میلیون ریال در هر فعالیت انجام گیرد. به چند طریق این کار امکان پذیر است اگر.

الف) بخواهیم در همه فعالیت‌ها سرمایه گذاری کنیم؟

ب) بخواهیم در حداقل ۳ فعالیت سرمایه گذاری کنیم؟

$$\begin{aligned} & \text{فعالیتها} \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 - 2 - 2 - 3 - 4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ & \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 2 \\ x_3 \geq 3 \\ x_4 \geq 4 \end{array} \right. \quad \text{الف} \end{aligned}$$

$$220 = \binom{9+4-1}{4-1} = \text{تعداد حالات}$$

ب) چهار حالت ممکن است رخداد:

حل المسائل - مبانی احتمال

١٢

آنالیز ترکیباتی

$$\begin{cases} 1) \quad x_i + x_r + x_f = 20 - 2 - 2 - 3 = 13 \\ 2) \quad x_i + x_r + x_f = 20 - 2 - 2 - 4 = 12 \\ 3) \quad x_i + x_r + x_f = 20 - 2 - 3 - 4 = 11 \\ 4) \quad x_r + x_f + x_f = 20 - 2 - 3 - 4 = 11 \end{cases}$$

مجموع حالتها = تعداد حالات ممكنا

$$= \binom{13+3-1}{3-1} + \binom{12+3-1}{3-1} + \binom{11+3-1}{3-1} + \binom{10+3-1}{3-1}$$

= 572

## فصل دوم

## اصول احتمال

- ۱- یک مغازه خرده فروشی دو نوع کارت اعتباری A و B را می پذیرد. ۲۴ درصد از مشتریان کارت نوع A، ۶۱ درصد کارت نوع B و ۱۱ درصد هر دو نوع کارت را با خود دارند. چند درصد از مشتریان کارتی دارند که مورد قبول فروشگاه است؟  
منظور پیدا کردن  $(A \cup B)$  می باشد:

$$A = 24\%, B = 61\%, A \cap B = 11\%$$

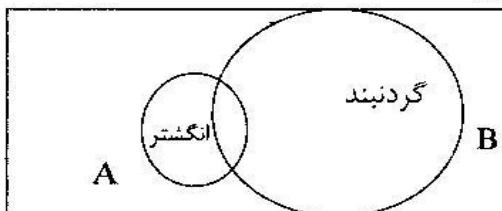
$$(A \cup B) = A + B - (A \cap B) = 24 + 61 - 11 = 74\%$$

- ۲- ۶۰ درصد از دانش آموزان یک مدرسه دخترانه انگشت و گردنبند ندارند. ۲۰ درصد انگشت و ۳۰ درصد گردنبند دارند. اگر بک دانش آموز به تصادف انتخاب شود، احتمال اینکه این دانش آموز ،

الف) انگشت یا گردنبند داشته باشد چقدر است؟

ب) انگشت و گردنبند داشته باشد چقدر است؟

برای درک بهتر مسئله به نمودار ون توجه کنید:



(الف)

$$P(A \cup B)' = 0.6 \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(A) = 0.2 \quad P(B) = 0.3$$

$$P(A \cap B) = (A \cup B) - P(A) - P(B) = 0.1 \quad (\text{ب})$$

- ۳- یک مشتری در بازدید از یک فروشگاه، کت و شلواری را با احتمال ۰/۲۲ بپراهنی، را با احتمال ۰/۳ و جورابی را با احتمال ۰/۲۸ خریداری می کند. اگر وی کت و شلوار و بپراهن را با احتمال ۰/۱۱ کت و شلوار و جوراب را با احتمال ۰/۱۴ و بپراهن و جواب را با احتمال ۰/۰ و هر سه را با احتمال ۰/۰۶ خریداری کند،

الف) احتمال اینکه وی هیچکدام را نخرد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه وی دقیقاً یک کالا را خریداری کند چقدر است؟

(الف)

$$P(K \cap J) = 0/14, P(K \cap P) = 0/11, P(J) = 0/28, P(P) = 0/2, P(K) = 0/22$$

$$, P(K \cap P \cap J) = 0/06, P(P \cap J) = 0/1 [(P(K \cup P \cup J))]' = ?$$

$$P(K \cup P \cup J) = P(K) + P(P) + P(J) - P(K \cap P) - P(K \cap J) - P(P \cap J) + P(K \cap P \cap J)$$

$$P(K \cup P \cup J) = 0/51 \Rightarrow [P(K \cup P \cup J)]' = 0/49$$

(ب)

$$\left\{ \begin{array}{l} P(P \cup J) = 0/48 \\ \text{احتمال خرید پیراهن یا جوراب} \\ \text{احتمال خرید کت و شلوار} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$P(K) = P(K \cup P \cup J) - P(P \cup J) = 0/51 - 0/48 = 0/03$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(K \cup J) = 0/36 \\ \text{احتمال خرید کت و شلوار یا جوراب} \\ \text{احتمال خرید پیراهن} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$P(P) = P(K \cup P \cup J) - P(K \cup J) = 0/51 - 0/36 = 0/15$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(K \cup P) = 0/4 \\ \text{احتمال خرید کت و شلوار یا پیراهن} \\ \text{احتمال خرید جوراب} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$P(J) = P(K \cup P \cup J) - P(K \cup P) = 0/51 - 0/41 = 0/1$$

$$P(K) + P(P) + P(J) = 0/03 + 0/15 + 0/1 = 0/28 \Rightarrow \text{احتمال خرید دقیقاً یک جنس}$$

- یک مدرسه ۳ کلاس زبان اسپانیایی، فرانسوی و آلمانی را ارائه می‌دهد و هر یک از ۱۰۰ دانش آموز مدرسه می‌توانند در هریک از کلاس‌های فوق ثبت نام کنند. اگر ۲۸ نفر در کلاس اسپانیایی، ۲۶ نفر در کلاس فرانسه و ۱۶ نفر در کلاس آلمانی ثبت نام کنند و بعلاوه ۱۲ نفر در دو کلاس اسپانیایی و فرانسوی، ۴ نفر در دو کلاس اسپانیایی و آلمانی، ۶ نفر در دو کلاس فرانسوی و آلمانی و ۲ نفر در هر سه کلاس ثبت نام کرده باشند. آنگاه:

- الف) اگر دانش آموزی را به تصادف انتخاب کنیم ، با چه احتمالی او در هیج کلاس ثبت نام نکرده است؟
- ب) اگر دانش آموزی به تصادف انتخاب شود ، با چه احتمالی او دقیقاً در یک کلاس ثبت نام کرده است؟
- ج) اگر ۲ دانش آموز به تصادف انتخاب شوند، با چه احتمالی حداقل یکی از آنها در کلاس ثبت نام کرده است؟
- الف ) ابتدا احتمال ثبت نام دانش آموزان مورد نظر را در حداقل یک کلاس بدست آورده و برای بدست آوردن جواب مساله آن را از یک کم می کنیم:

$$\begin{aligned} P(A \cup E \cup F) &= P(A) + P(E) + P(F) - P(A \cap E) - P(A \cap F) \\ &\quad - P(E \cap F) + P(A \cap E \cap F) \\ &= ۰/۱۶ + ۰/۲۸ + ۰/۲۶ - ۰/۰۶ - ۰/۰۴ - ۰/۰۲ + ۰/۰۱ \end{aligned}$$

۰/۰۵ = ۱ - احتمال ثبت نام در هیج کلاس

ب) مانند قسمت ب سوال قبل (سوال سوم) داریم:

$$\begin{cases} P(E \cup F) = ۰/۴۲ \\ P(۱) = P(E \cup F \cup A) - P(E \cup F) = ۰/۰۸ \\ \begin{cases} P(E \cup A) = ۰/۴ \\ P(۲) = ۰/۱ \end{cases} \quad \begin{cases} P(F \cup A) = ۰/۳۶ \\ P(۳) = ۰/۱۴ \end{cases} \\ P = P(۱) + P(۲) + P(۳) = ۰/۳۲ \end{cases}$$

ج) احتمال ثبت نام حداقل یک دانش آموز از انتخاب دو دانش آموز به صورت تصادفی عبارتست از :

$$P(M) = \frac{\binom{۵۰}{۱}\binom{۵۰}{۱} + \binom{۵۰}{۲}}{\binom{۱۰۰}{۲}} = \frac{۱۴۹}{۱۹۸}$$

ثبت نام کرده اند و نصف دیگر ثبت نام نکرده اند.

۵- در شهری با جمعیت ۱۰۰۰ نفر سه روزنامه I، II و III منتشر می شود، نسبت کسانیکه این روزنامه ها را مطالعه می کنند بصورت زیر داده شده است.

$$\text{I: } 10 \text{ درصد} \quad \text{II: } 20 \text{ درصد} \quad \text{III: } 5 \text{ درصد}$$

$$\text{لو: } 2 \text{ درصد} \quad \text{لوا: } 4 \text{ درصد} \quad \text{لوا: یک درصد}$$

الف) تعداد افرادی که فقط یک روزنامه را مطالعه می کنند چقدر است؟

ب) چه تعدادی حداقل ۲ روزنامه را مطالعه می کنند؟

ج) اگر I و III روزنامه صبح و II روزنامه عصر باشد چند نفر حداقل یک روزنامه صبح بعلاوه یک روزنامه عصر را مطالعه می کنند؟

د) چند نفر همچ روزنامه ای را مطالعه نمی کنند؟

ه) چند نفر فقط یک روزنامه صبح و یک روزنامه عصر را مطالعه می کنند؟

الف) مانند قسمت ب سوالهای ۳ و ۴: نفر ۲۰۰۰ =  $(100000) \times (0.12)$

ب) (دقیقاً یکی)  $P = P(I \cup II \cup III) = \text{دقیقاً یک روزنامه} - \text{سه روزنامه}$

$$\text{نفر } 12000 = (100000) \times (0.12) \Rightarrow 0.12 = 0.12 - 0.32 \Rightarrow 0.32 = 0.32$$

$$\text{ج) } P(I \cap II) = 0.02 \quad P(I \cap III) = 0.01 \quad P(II \cap III) = 0.008$$

چون واژه حداقل ذکر شده است

$$\text{نفر } 11000 = 100000 \times (0.12 + 0.02 + 0.01) = \text{تعداد افرادی که حداقل یک روزنامه صبح}$$

بعلاوه یک روزنامه بعد از ظهر مطالعه می کنند

$$\text{د) } P = 0.32 = 1 - P(I \cup II \cup III) = 1 - 0.12 = 0.88 \quad (\text{همچ فردی روزنامه نخواند})$$

$$\text{نفر } 68000 = 100000 \times (0.08) = \text{تعداد افراد عصر صبح}$$

$$P(I \cap II) = 0.08 \quad P(II \cap III) = 0.02 \quad (\text{ه})$$

$$\Rightarrow P = 0.12 + 0.02 + 0.08 = 0.22 = 0.88 \quad (\text{فقط یک صبح و یک عصر})$$

$$\text{نفر } 10000 = 100000 \times (0.1) = \text{تعداد افراد}$$

۶- اطلاعات زیر در رابطه با شغل، وضعیت تأهل و تحصیلات ۱۰۰۰ نفر مشترک یک

مجله داده شده است: ۳۱۲ نفر شاغل، ۲۷۰ نفر متاهل، ۵۲۵ نفر دانشجوی شاغل.

## حل المسائل - مبانی احتمال

## اصول احتمال

۱۹

۱۴۷ نفر دانشجوی متاهل ، ۸۶ نفر متأهل شاغل و ۲۵ نفر دانشجوی شاغل و متأهل هستند. نشان دهید که اعداد گزارش شده غلط هستند.

راهنمایی:

اگر  $W$ ,  $M$  و  $G$  نشان دهنده مجموعه های شاغلین ، متاهلین و دانشجویان باشد فرض کنید یک نفر از ۱۰۰۰ نفر به تصادف انتخاب شده است و گزاره (۴-۴) را بکار برد ، نشان دهید که اگر اطلاعات فوق صحیح باشد آنگاه

$$P(M \cup W \cup G) = 1$$

$$P(Sh \cap D) = 0.312 \quad P(Sh) = 0.47 \quad p(M) = 0.42 \quad p(D) = 0.25$$

$$P(D \cap Sh \cap M) = 0.086 \quad P(M \cap Sh) = 0.147$$

چون احتمال مورد نظر بزرگتر از یک شده است و چنین چیزی امکان ندارد لذا اطلاعات غلط هستند.

$$P(Sh \cup D \cup M) = 1.07 > 1$$

\* -۷

\* -۸

\* -۹

۱۰- اگر ۸ مهره رخ شطرنج را به تصادف روی صفحه شطرنج قرار دهیم احتمال اینکه هیچ یک از رخ ها دیگری را نزند یعنی اینکه هیچ سطر و یا ستونی بیش از یک رخ نداشته باشد را بدست آورید.

$$\frac{152}{8^4} = 9/0.599 \times 10^{-4}$$

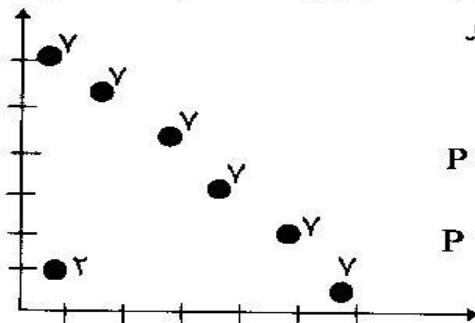
\* -۱۱

۱۲- اگر دو تاس را پرتاب کنیم ، احتمال اینکه مجموع دو عدد ظاهر شده برابر باشد را بدست آورید . مقدار آن را برای ۱۲ و ۱۱ و ۱۰ و ۳ و ۲ = ۱۴۱ کنید . با توجه به نمودار می توان تمام احتمالات مورد نظر را محاسبه نمود :

## فصل دوم

۲۰

فضای نمونه ای پر تاب دو تاس ۳۶ می باشد



$$P = \frac{1}{36} \text{ - جمع)$$

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ - جمع)$$

۱۳- یک زوج تاس را پرتاب می کنیم تا جمع ۵ یا ۷ ظاهر شود. احتمال اینکه جمع ۵ ابتدا ظاهر شود را بدست آورید.

راهنمایی: اگر  $E_n$  نشان دهنده پیشامد ظاهر شدن ۵ در  $n$  امین پرتاب و ظاهر نشدن ۵ یا

$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$  پرتاب اول باشد.  $P(E_n)$  را محاسبه کنید و بررسی نماید که احتمال مورد نظر است.

تعداد حالت‌های مجموع ۵  $\{(2,3), (2,2), (1,4), (1,1)\}$  چهار حالت می باشد.  
و تعداد حالت‌های مجموع ۷  $\{(6,1), (1,6), (5,2), (5,5), (4,3)\}$  شش حالت می باشد.

لذا احتمال اینکه جمع ۵ ابتدا ظاهر شود  $\frac{4}{10}$  می باشد

۱۴- در یک بازی ، بازیکنی دو تاس را پرتاب می کند اگر مجموع دو عدد ظاهر شده ۲ یا ۳ یا ۱۲ باشد بازنده است و اگر مجموع ۷ یا ۱۱ باشد برنده است. اگر نتیجه عدد دیگری باشد بازی ادامه پیدا می کند تا اینکه او نتیجه قبلی را بدست آورد و با نتیجه ۷ حاصل گردد. اگر نتیجه ۷ ابتدا ظاهر شود بازیکن بازنده است در حالیکه اگر نتیجه قبلی پیش از ۷ ظاهر شود بازیکن برنده است. احتمال برنده شدن این بازیکن را بدست آورید.

ابتدا حالت‌های ممکن را در نظر می گیریم

$$\{(6,6), \dots, (5,5), (4,4), \dots, (2,2), (1,1), \dots, (1,1)\}$$

۱۵- ظرفی شامل ۳ توب قرمز و ۷ توب سیاه است. بازیکن های A و B یکی پس از دیگری توب ها از ظرف خارج می کنند تا یک توب قرمز انتخاب شود. احتمال اینکه

بازیکن A توب قرمز را انتخاب کند بدست آورید. (ابتدا بازیکن A ، توب از ظرف انتخاب می کند و سپس بازیکن B و به همین ترتیب بازی ادامه می یابد، در ضمن توپهای انتخاب شده به ظرف بازگردانده نمی شوند).

چهار امکان وجود دارد که مجموع این چهار حالت احتمال مورد نظر خواهد بود.

حالت اول : فرض می کنیم که فرد A در همان ابتدا مهره قرمز را انتخاب کند که احتمال آن  $\left(\frac{3}{10}\right)$  می باشد.

حالت دوم: فرض می کنیم که فرد A مهره سیاه بردارد و چون فرد B نیز باید مهره سیاه بردارد تا فرد A در مرحله بعد مهره قرمز را بردارد داریم : چون برداشتن توپها یا مهره ها بدون جایگزاری است :

$$\Rightarrow \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{175}{1000}$$

حالت سوم : فرض می کنیم در مرتبه دوم هم فرد A مهره (توب) قرمز را برندارد لذا این عمل ادامه می یابد:

$$\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = 0.0833$$

حالت چهارم : فرض می کنیم در مرتبه سوم فرد A مهره قرمز را برندارد و چون فرد B نیز باید مهره قرمز را بردارد داریم :

$$\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 0.025$$

اگر فرض کنیم که در مرحله چهارم هم فرد A مهره سیاه را بردارد چون تنها سه مهره قرمز باقی می ماند و فرد B ناچار به انتخاب مهره قرمز خواهد شد لذا این فرض با فرض ابتدای مسئله متناقض خواهد بود. با جمع کردن احتمال چهار حالت فوق داریم:

$$P = 0.025 + 0.0833 + 0.175 + 0.0072 = 0.2822$$

۱۶- ظرفی شامل ۵ توب قرمز و ۶ توب آبی و ۸ توب سبز است. اگر یک مجموعه ۳ تایی از توپها به تصادف انتخاب شود ، احتمال زیر را بدست آورید.

الف) توپها از یک رنگ باشند.

## فصل دوم

۲۲

## حل المسائل - مبانی احتمال

ب) تویها از رنگهای متفاوت باشد.

مساله را در صورتی که رنگ توپ انتخاب شده را بادداشت نموده و سپس قبل از انتخاب دوم در ظرف بازگردانده شود. حل کنید این نوع انتخاب را نمونه گیری با جایگذاری گویند.

الف) سه حالت ممکن است رخ دهد: حالت اول: هر سه قرمز، حالت دوم: هر سه آبی.

حالت سوم: هر سه سبز

$$P = \frac{\binom{5}{3} \binom{6}{3} \binom{8}{3}}{\binom{19}{3}^3} + \frac{\binom{6}{3} \binom{8}{3} \binom{5}{3}}{\binom{19}{3}^3} + \frac{\binom{8}{3} \binom{5}{3} \binom{6}{3}}{\binom{19}{3}^3} = 0.088$$

(تویها هم رنگ باشند)

ب) احتمال اینکه تویها از رنگهای متفاوت باشند عبارتست از

$$P = \frac{\binom{5}{1} \binom{6}{1} \binom{8}{1}}{\binom{19}{3}^3} = 0.2477$$

(رنگی متفاوت)

اگر قرار باشد نمونه گیری با جایگذاری انجام گیرد داریم.

$$p = \frac{5}{19} \times \frac{5}{19} \times \frac{5}{19} = \frac{125}{6859}$$

(هر سه قرمز باشند)

$$p = \frac{6}{19} \times \frac{6}{19} \times \frac{6}{19} = \frac{216}{6859}$$

(هر سه آبی باشند)

$$p = \frac{8}{19} \times \frac{8}{19} \times \frac{8}{19} = \frac{512}{6859}$$

(هر سه سبز باشند)

$$p = (0.1243) + p(0.2477) + p(0.088)$$

ب) احتمال اینکه تویها از رنگهای متفاوت باشند:

$$p = \frac{5}{19} \times \frac{6}{19} \times \frac{8}{19} = 0.035$$

(رنگها متفاوت)

## حل المسائل - مبانی احتمال

## اصول احتمال

۲۳

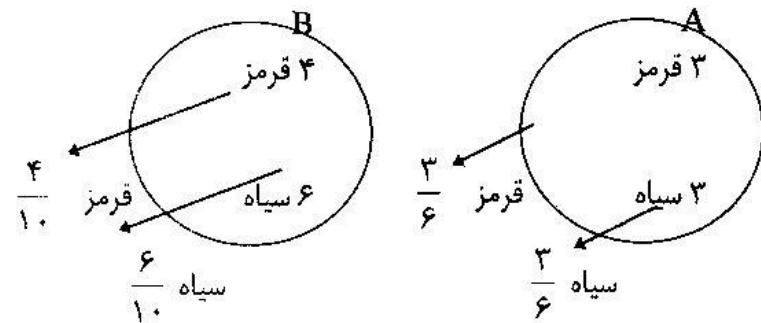
۱۷- ظرف A شامل ۳ توب قرمز و ۳ توب سیاه است. در حالیکه ظرف B دارای ۴ توب قرمز و ۶ توب سیاه است. اگر یک توب را به تصادف از هر ظرف انتخاب کنیم، احتمال اینکه توبها دارای یک رنگ باشند چقدر است؟

$$p = \text{توبها یک رنگ})$$

$$p(\text{سیاه}) + p(\text{قرمز})$$

$$= \left( \frac{3}{6} \times \frac{4}{10} \right) + \left( \frac{3}{6} \times \frac{6}{10} \right)$$

$$= 0.15$$

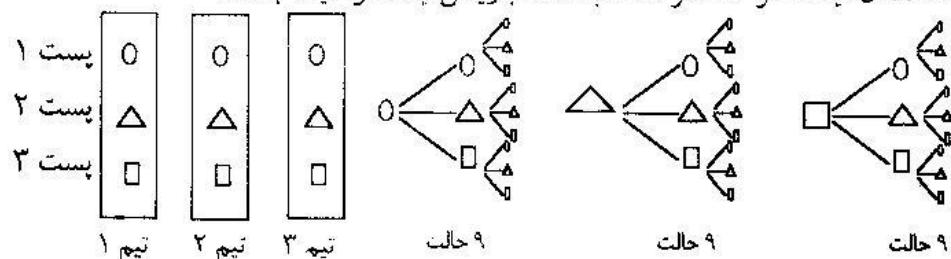


۱۸- یک تیم بسکتبال سه نفره شامل یک مدافع، یک نفر خط حمله و یک نفر در مرکز است.

(الف) از هر یک از سه تیم با ترکیب فوق یک فرد به تصادف انتخاب می شود. احتمال

$$\text{اینکه یک تیم کامل انتخاب شود را بدست آورید} = 9+9+9 = 27 = \text{فضای نمونه}$$

(ب) احتمال اینکه هر سه نفر انتخاب شده بازیکن یک موقعیت باشند.



(الف) کامل بودن تیم یعنی هر یک از ترکیب‌های (□ و ○ و △ و ○) که با کمی دقت

مالحظه می شود در ۶ حالت از ۲۷ حالت فضای نمونه تیم کامل است پس :

$$p = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} = (\text{تیم کامل})$$

(ب) بازیکن یک موقعیت، یعنی هر یک از ترکیب‌های (□ و ○ و △ و ○) با (○ و ○ و ○) یا (○ و ○ و ○) که ۳ حالت از ۲۷ حالت دارای این ترکیبها می باشد:

## فصل دوم

## حل المسائل - مبانی احتمال

۱۹- یک گروه از افراد خردسال شامل  $b$  پسر بچه و  $g$  دختر بچه را به تصادف در یک خط ردیف می کنیم یعنی هر یک از  $(b+g)$  جایگشت افراد هم شانس هستند. احتمال اینکه فرد قرار گرفته در موقعیت  $(b+i \leq i \leq b+g)$  دختر بچه باشد را بدست آورید.

دختربچه دام را از جمع خارج کرده احتمال مورد نظر را محاسبه می کنیم:

ابتدا تعداد حالتها برابر است با  $b+g$  دختر کنار هم قرار می گیرند را محاسبه می کنیم:

$$\frac{(b+g-1)!}{b!(g-1)!} = A$$

$$P(A) = \frac{A}{(b+g)!}$$

احتمال مورد نظر عبارت است از:

۲۰- در جنگلی ۲۰ گوزن وجود دارد که ۵ تای آنها را پس از به دام انداختن علامت‌گذاری و رها کرده اند. مدتی بعد ۴ گوزن را مجدداً به دام می اندازند. احتمال اینکه ۲ تا از گوزن های به دام افتاده دارای علامت باشند را بدست آورید. چه فرضی را در نظر می گیرید؟

$$P = \frac{\binom{5}{2} \binom{15}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{70}{323} = 0.2167$$

۲۱- در یک بازی شانس، بازیکن بایستی ۸ عدد را از بین اعداد ۱ تا ۴۰ انتخاب کند؛ هیئت برگزار کننده سپس در یک نمایش ۸ عدد از ۴۰ عدد را انتخاب می کند فرض کنید هر

بک از  $\binom{40}{8}$  انتخاب هیئت برگزار کننده هم شانس باشند. احتمال پیشامد های زیر را برای بازیکن بدست آورید.

الف) هر ۸ عدد انتخاب شده توسط هیئت برگزار کننده نیز انتخاب شوند.

## حل المسائل - مبانی احتمال

## اصول احتمال

۲۵

ب) ۷ تا از ۸ عدد انتخاب شده توسط هیئت برگزار کننده انتخاب شوند.

ج) حداقل ۶ تا از آنها انتخاب شوند.

$$P(A) = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{40}{8}} = 1/3 \times 10^{-9} \quad (\text{الف})$$

$$P(B) = \frac{\binom{8}{7}\binom{32}{1}}{\binom{40}{8}} = 3/328 \times 10^{-9} \quad (\text{ب})$$

$$P(C) = \frac{\binom{8}{8} + \binom{8}{7}\binom{32}{1} + \binom{8}{6}\binom{32}{2}}{\binom{40}{8}} = 1/839 \times 10^{-9} \quad (\text{ج})$$

\*\*\*-۲۲

۲۳- تعداد ۳۰ نفر روانپرشک و ۲۴ نفر روانشناس در یک کنفرانس شرکت کرده اند. ۳ نفر از آنها را برای حضور در یک میزگرد به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه حداقل یک روانپرشک انتخاب شود چقدر است؟

$$P(\text{انتخاب حداقل یک روانپرشک}) = \frac{\binom{30}{1}\binom{24}{2} + \binom{30}{2}\binom{24}{1} + \binom{30}{3}}{\binom{54}{3}} = .9184$$

\*-۲۴

## فصل دوم

۲۶

## حل المسائل - مبانی احتمال

۲۵ - معلمی به دانش آموزان یک کلاس ۱۰ سوال داده و به آنها اطلاع می دهد که امتحان نهایی شامل ۵ سوال تصادفی از سوالات داده شده است. اگر دانش آموزی توانسته باشد به ۷ سوال پاسخ دهد ، مطلوب است احتمال اینکه

الف) در امتحان به هر ۵ سوال پاسخ صحیح بدهد؟

ب) حداقل به ۴ سوال امتحانی پاسخ صحیح بدهد؟

$$P = \text{(پاسخ دادن به هر ۵ سوال)} = \frac{\binom{5}{5} \binom{5}{2}}{\binom{10}{7}} = 0.0833 \quad \text{(الف)}$$

$$P = \text{(انتخاب حداقل یک روانپردازی)} = \frac{\binom{5}{4} \binom{5}{2} + \binom{5}{5} \binom{5}{2}}{\binom{10}{7}} = 0.5 \quad \text{(ب)}$$

۲۶ -  $n$  جوراب داریم که ۳ تای آنها قرمز است. اگر احتمال انتخاب ۲ جوراب قرمز به تصادف برابر با  $\frac{1}{2}$  باشد، مقدار  $n$  را بدست آورید.

$$P = \text{۲ جوراب قرمز} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{2} \quad \text{برای محاسبه مقدار } n \text{ داریم:}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\binom{n!}{2!(n-2)!}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{6}{n(n-1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow n(n-1) = 12 \Rightarrow n = 4$$

۲۷ - در شهری ۵ هتل وجود دارد. اگر در یک روز ۲ نفر ساکن هتل شده باشند. احتمال اینکه هر یک در هتلی جداگانه مستقر باشند را بدست آورید. چه فرضهایی را برای حل مساله در نظر می گیرید؟

## حل المسائل - مبانی احتمال

## اصول احتمال

۲۷

فرض می کنیم ۳ توب را می خواهیم در ۵ ظرف توزیع کنیم تعداد حالت‌های توزیع این سه توب به دلیل اینکه توبها با هم متفاوت هستند (افراد متفاوت می باشند) عبارتست از:  $5^3$  که فضای نمونه ای خواهد بود.

توب اول می تواند هر یک از ۵ ظرف را انتخاب کند، توب دوم می تواند وارد هر یک از ۴ ظرف باقیمانده شود و در نهایت توب سوم می تواند وارد هر یک از ۳ ظرف باقیمانده شود. لذا داریم:

$$p = \frac{5 \times 4 \times 3}{5^3} = 0.48$$

۲۸ - شهری ۴ نفر تعمیر کار تلویزیون دارد. اگر ۴ دستگاه تلویزیون خراب باشند. با چه احتمالی دقیقاً به تعمیر کار مراجعه می شود؟ مسئله را برای ۴ و ۳ و ۲ و ۱ = حل کنید. چه فرضهایی را در نظر می گیرید؟

این مسئله حالت کلی تری از مسئله ۲۷ می باشد. مثلاً

$$P = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4^4} = 0.09375$$

۲۹ - اگر تاسی را ۴ مرتبه پرتاب کنیم ، احتمال اینکه حداقل یک مرتبه عدد ۶ ظاهر شود چقدر است؟

در ۴ مرتبه پرتاب تاس: (ظاهر شدن عدد ۶)  $p = 1 -$  (ظاهر شدن حداقل یکبار عدد ۶)  $p$

$$p = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = (ظاهر نشدن ۶ در چهار پرتاب) p$$

$$p = 1 - \left( \frac{5}{6} \right)^4 = 0.517$$

۳۰ - دو تاس را  $n$  مرتبه به طور متوالی پرتاب می کنیم . احتمال اینکه حداقل یک مرتبه جفت ۶ ظاهر شود را بدست آورید.  $n$  چقدر بزرگ باشد تا احتمال فوق حداقل برابر با  $\frac{1}{2}$  گردد؟

$$(ظاهر نشدن جفت ۶) = 1 - p = (ظاهر شدن حداقل یکبار جفت ۶)$$

$$p = \frac{35}{36} \quad (\text{ظاهر نشدن چهت ۶ در } n \text{ پرتاب})$$

$$p = ? \quad (\text{ظاهر شدن حداقل یکبار چهت ۶})$$

$$1 - \frac{35}{36}$$

برای یافتن  $N$  باید شرط زیر را در نظر گرفت:

که با حل نا معادله  $24 = n$  بدست خواهد آمد.

۳۱- الف) اگر  $N$  نفر شامل  $A$  و  $B$  به تصادف در یک ردیف قرار گیرند. احتمال اینکه  $A$  و  $B$  پهلوی هم باشند چقدر است؟

ب) احتمال پیشامد فوق، وقتی که افراد به تصادف روی محیط یک دایره قرار گیرند را بدست آورید.

$$P(A, B) = \frac{(N-1)!}{N!} \quad (\text{الف) } A \text{ و } B \text{ را یک نفر در نظر می گیریم لذا داریم:}$$

ب) چون تعداد حالتایی که  $N$  نفر دو ریک میز باشند برابر با  $(n-1)!$  است پس:

$$P(B, A) = \frac{(N-2)!}{(N-1)!} \quad (\text{پهلوی هم})$$

۳۲- از یک گروه دانشجویان شامل ۳ نفر دانشجوی سال اول، ۴ نفر سال دوم، ۴ نفر سال سوم و ۳ نفر سال سوم و ۳ نفر سال چهارم شورای ۴ نفره به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) از هر سال یک نفر در شورا باشند.

ب) ۲ نفر دانشجوی سال دوم و ۲ نفر دانشجوی سال سوم در شورا باشند.

ج) فقط دانشجویان سال دوم و سال سوم در شورا باشند.

الف) باید از هر سال یک نفر انتخاب شود.

$$P = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{14}{4}} = 0.1428 \quad (\text{از هر سال یک نفر})$$

$$P = \frac{\binom{4}{2} \binom{4}{2}}{\binom{14}{4}} = 0.36 \quad (ب)$$

$$P = \frac{2 \times \binom{4}{4} + \binom{4}{2} \binom{4}{2} + \binom{4}{3} \binom{4}{1} + \binom{4}{1} \binom{4}{2}}{\binom{14}{4}} = 0.7 \quad (ج)$$

خانم  $n$  کلید دارد که یکی از آنها درب منزلش را باز می کند.

(الف) اگر او کلید های را به تصادف انتخاب کرده و آنها بیکار که درب را باز نمی کنند

کنار گذارد با چه احتمالی او در  $K$  امین تلاش درب را باز می کند؟

(ب) اگر او کلید های قبلی را کنار نگذارد احتمال پیشامد فوق چقدر است؟

$$P = \frac{1}{n} \quad (الف)$$

چند نفر بایستی در یک اطاق حضور داشته باشند. تا احتمال اینکه حداقل دو نفر از

آنها تولدشان را در یک ماه جشن بگیرند. بیش از  $\frac{1}{2}$  باشد؟ فرض کنید تولد در ماههای مختلف هم شانس است.

احتمال اینکه هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند عبارتست از:

$$P(A) = \frac{12 \times 11 \times \dots \times (12-n+1)}{(12)^n}$$

$$1 - P(A) > \frac{1}{2} \Rightarrow P(A) < \frac{1}{2} \Rightarrow n = 5$$

-۳۵- اوضاع میز اخاسته  $12 \times 11 \times \dots \times 2 \times 1$  اتوبوس اصل المنشی گلشن  $n$  تا جلچ تولدشان را در یک ماه جشن بگیرند چقدر است؟

$$P = \frac{12 \times 11 \times \dots \times 2 \times 1}{(12)^n} = 5/37 \times 10^{-5} \quad (\text{هیچکدام در یک ماه متولد نشوند})$$

### حل المسائل - مبانی احتمال

### فصل دوم

۳۰

۳۷) یک گروه متشكل از عمرد و زن را به تصادف به دو گروه نفره تقسیم می کنیم احتمال اینکه هر دو گروه تعداد مساوی مرد داشته باشند را بدست آورید.

$$p = \frac{\binom{6}{3} \times \binom{6}{3}}{\binom{12}{6}} = \frac{20 \times 20}{924} = 0.4329$$

\* - ۲۸

۳۹) فرض کنید  $n$  توب را به تصادف در  $N$  ظرف توزیع کنیم. احتمال اینکه  $m$  توب در ظرف اول باشد را بدست آورید. فرض کنید که همه  $N$  ترتیب توزیع توبها هم شانس باشند.

چون توبها یکسان فرض نشده اند توزیع آنها در  $N$  ظرف  $m$  خواهد بود. برای آنکه  $m$  توب در ظرف اول قرار گیرد  $m$  توب و ظرف اول را از مجموعه کل (فضای نمونه ای) بر می داریم:

$$\frac{(N-1)^{n-m}}{N^n}$$

۴۰) در کمدمی ۱۰ جفت کفش نگهداری می شود. اگر ۸ کفش به تصادف انتخاب شود، احتمال پیش آمدهای زیر را بدست آورید.

الف) هیچ جفت کفش انتخاب نشود.

ب) درست یک جفت کفش انتخاب شود.

الف) هیچ جفت کفش انتخاب نشود؛ برای اینکه هیچ جفت کفش انتخاب نشود باید هر لنگه کفش مربوط به یک جفت متفاوت باشد تعداد راههای انتخاب ۸ لنگه کفش از بین ۱۰

$$\text{جفت کفش برابر است با: } \binom{10}{8}$$

یعنی ۸ جفت متفاوت انتخاب شود و برای هر جفت کفش دو انتخاب برای پای راست و چپ وجود دارد. پس  $2^8$  انتخاب ممکن است رخداد. در این صورت :

$$p = \frac{\binom{10}{8}}{\binom{20}{8}} = 0.9145 \quad \text{(انتخاب درست هیچ جفت کفش)}$$

ب) چون انتخاب ۸ لنگه کفش یعنی انتخاب ۴ جفت کفش لذا داریم:

$$p = \frac{4 \times \binom{10}{6}}{\binom{20}{8}} = 0.4267 \quad \text{(انتخاب درست یک جفت کفش)}$$

۴۱) یک تیم بسکتبال متشکل از ۶ بازیکن سیاه پوست و ۴ بازیکن سفید پوست است اگر بازیکنها دو به دو هم اطاق باشند. احتمال اینکه در دو اطاق یک بازیکن سفید پوست و یک بازیکن سیاه پوست باشد را بدست آورید.

ابتدا فضای نمونه ای را بدست می آوریم چون ۱۰ نفر را به ۵ گروه ۲ نفری تقسیم کرده ایم داریم:

$$\binom{10}{2,2,2,2,2}$$

$$\frac{10!}{2^5 5!}$$

چون ترتیب قرار گرفتن آنها برای ما مطرح نیست

برای بدست آوردن احتمال مربوطه داریم:

$$p(A) = \frac{\binom{6}{2} \binom{4}{2} 2! \left[ \frac{(4-2)!}{2^{2-1}(2-1)!} \right] \left[ \frac{(6-2)!}{2^{3-1}(3-1)!} \right]}{\frac{10!}{2^5 5!}} = \frac{4}{7}$$

با توجه به فرمول ارائه شده در فصل دوم:

۴۲) اگر ۴ زوج به تصادف در یک ردیف صندلی بنشینند، احتمال اینکه هیچ شوهری بهلوی همسرش نباشد را بدست آورید.

احتمال اینکه  $n$  زوج ( $4 \leq n$ ) از این ۴ زوج بهلوی هم باشند عبارتست از :

## فصل دوم

## حل المسائل - مبانی احتمال

$$P(A) = \frac{2^n (\lambda - n)!}{\lambda!}$$

احتمال اینکه حداقل یک زوج بہلوی هم باشند عبارتست از :

$$P(B) = \binom{4}{1} \frac{2^1 \lambda!}{\lambda!} - \binom{4}{2} \frac{2^2 \lambda!}{\lambda!} + \binom{4}{3} \frac{2^3 \lambda!}{\lambda!} - \binom{4}{4} \frac{2^4 \lambda!}{\lambda!} = \frac{23}{35}$$

$$\cdot P(B) = 1 - P(\text{هیچ شوهری پہلوی همسرش نباشد}) = 1 - \frac{23}{35} = \frac{12}{35}$$

\* - ۴۳

\* - ۴۴

## فصل سوم

احتمال شرطی و  
استقلال

## فصل سوم

## حل المسائل - مبانی احتمال

۱- ۲ تاس منظم پرتاب شده اند احتمال اینکه حداقل یکی از تاس ها عدد ۶ ظاهر شود اگر نتیجه دو تاس متفاوت باشد چقدر است؟

$$(دومی ۶ | اولی غیر ۶) + (دومی غیر ۶ | اولی ۶) = P = \text{هر دو متفاوت} | \text{حداقل یکی ۶}$$

$$= \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{P(6 \cap 6)}{P(6)} + \frac{P(6 \cap 6)}{P(6)}$$

۲- اگر ۲ تاس منظم پرتاب شوند. احتمال شرطی اینکه اولین تاس عدد ۶ ظاهر شود بشرط اینکه مجموع دو تاس ۷ باشد را بدست آورید. این احتمال را برای نیم ۲ و نیم ۱۲ محاسبه کنید.

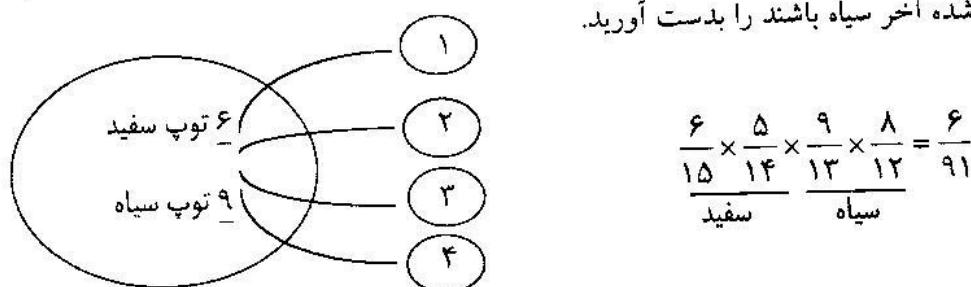
به عنوان مثال :

$$P(\text{جمع ۷} | \text{اولی ۶}) = \frac{P(\text{جمع ۷} \cap \text{اولی ۶})}{P(\text{اولی ۶})} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

\* - ۳

\* - ۴

۵- کيسه ای شامل ۶ توپ سفید و ۹ توپ سیاه است. اگر ۴ توپ را به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب کنیم. احتمال اینکه ۲ توپ انتخاب شده اول سفید و دو توپ انتخاب شده آخر سیاه باشند را بدست آورید.



۶- ظرفی را در نظر بگیرید که در آن ۱۲ توپ قرار دارد و ۸ تای آن سفید است یک نمونه ۴ تایی را از ظرف با جایگذاری (بدون جایگذاری) انتخاب می کنیم احتمال شرطی اینکه اولین و سومین توپ انتخاب شده سفید باشند بشرط اینکه نمونه انتخاب شده شامل ۳ توپ سفید باشد را بدست آورید. (در هر دو حالت)

الف) با جایگذاری

$$P(\text{سه تا سفید} | \text{اولی و سومی سفید}) = \frac{P(\text{سه تا سفید} | \text{اولی و سومی سفید})}{P(\text{سه تا سفید})} = \frac{\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{4}{12}}{\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{4}{12}} = \frac{1}{2}$$

ب) بدون جایگذاری

$$P(\text{سه تا سفید} | \text{اولی و سومی سفید}) = \frac{\frac{1}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{9}}{\frac{1}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{9}} = \frac{1}{2}$$

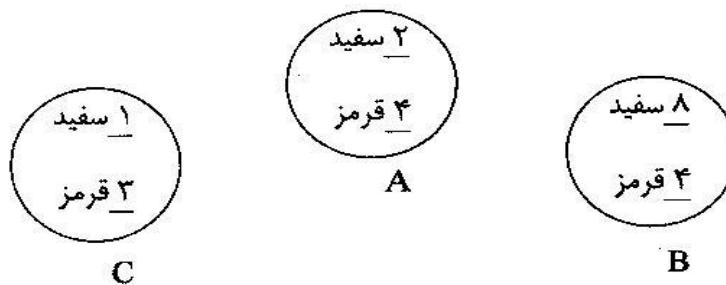
\* - v

روجی دارای ۲ فرزند هستند احتمال اینکه هر دو دختر باشند به شرط اینکه فرزند بزرگتر دختر است را بدست آورید.

$$P(\text{بزرگتر دختر} \cap \text{هر دو دختر}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{فرزند بزرگتر دختر} | \text{هر دو دختر}) = \frac{1}{4}$$

۳-۹ ظرف را در نظر بگیرید . ظرف A شامل ۲ توپ سفید و ۴ توپ قرمز است ، ظرف B شامل ۸ توپ سفید و ۴ توپ قرمز است و در ظرف C یک توپ سفید و ۳ توپ قرمز قرار دارد . اگر یک توپ را به تصادف از هر ظرف انتخاب کنیم ، احتمال اینکه توپ انتخاب شده از ظرف A سفید باشد بشرط اینکه ۲ توپ سفید انتخاب شده باشد را بدست آورید .



## فصل سوم

## حل المسائل - مبانی احتمال

۲) توب سفید  $\cap$  توب انتخابی A سفید)  $P$  = (دو توب سفید انتخاب شود | توب انتخابی از طرف A سفید باشد)

(دو توب سفید انتخاب شود)  $p$

$$= \frac{\binom{2}{1} \binom{8}{1} \binom{3}{1} + \binom{2}{1} \binom{4}{1} \binom{1}{1}}{\binom{2}{1} \binom{8}{1} \binom{3}{1} + \binom{2}{1} \binom{4}{1} \binom{1}{1} + \binom{4}{1} \binom{8}{1} \binom{1}{1}} = \frac{7}{11}$$

\* - ۱۰

\* - ۱۱

۱۲- شانس بارداری غیر طبیعی زنان بارداری که سیگاری هستند دو برابر زنان غیر سیگاری است. اگر ۳۲ درصد از زنای سن بارداری سیگاری باشند چند درصد از زنایی که بارداری غیر طبیعی دارند سیگاری هستند؟

$$P(\text{سیگاری باردار} \cap \text{سیگاری}) = \frac{P(\text{باردار} \cap \text{سیگاری})}{P(\text{باردار})} = \frac{P(\text{سیگاری باردار})}{P(\text{غیر سیگاری باردار})} = \frac{(0/32)(2)}{(0/32)(2) + (0/68)(1)} = 0/4848$$

\* - ۱۳

۱۴- در یک محله ۳۶ درصد از خانواده‌ها یک اتومبیل دارند که ۲۲ درصد از آنها یک دوچرخه هم دارند. ۳۰ درصد از خانواده‌ها یک دوچرخه ندارند مطلوب است:  
 الف) احتمال اینکه خانواده‌ای که به تصادف انتخاب می‌شود هم اتومبیل و هم دوچرخه داشته باشد.

ب) احتمال شرطی اینکه یک خانواده انتخاب شده اتومبیل داشته باشد بشرط اینکه این خانواده صاحب یک دوچرخه است.

$$\text{الف) } P(\text{دوچرخه} \cap \text{اتومبیل}) = P(\text{اتومبیل}) - P(\text{اتومبیل} \cap \text{دوچرخه})$$

$$P(\text{دوچرخه} \cap \text{اتومبیل}) = \frac{P(\text{اتومبیل}) - P(\text{اتومبیل} \cap \text{دوچرخه})}{P(\text{دوچرخه})} = \frac{0/0792}{0/3} = 0/264 \quad \text{ب)$$

حل المسائل - مبانی احتمالاحتمال شرطی و استقلال

۳۷

- ۱۵- در شهری ۴۶ درصد رأی دهنگان خود را در گروه مستقل می پنداشند در حالیکه ۳۰ درصد لیبرال و ۲۴ درصد محافظه کار هستند. در یک انتخابات محلی ۲۵ درصد از گروه مستقل ، ۶۲ درصد لیبرالها و ۵۸ درصد از محافظه کاران رأی داده اند. اگر رأی دهنده را به تصادف انتخاب کنیم و بدانیم که در انتخابات شرکت کرده است، احتمال اینکه او ،
- الف) از گروه مستقل باشد.
- ب) از گروه لیبرال باشد.
- ج) از گروه محافظه کار باشد.
- را بدست آورید.
- د) چه نسبتی از رأی دهنگان در انتخابات شرکت داشته اند.

(الف)

$$P(\text{مستقل} | \text{رأي دهد}) = \frac{P(\text{مستقل})}{P(\text{محافظه کار} | \text{رأي دهد}) + P(\text{لیبرال} | \text{رأي دهد}) + P(\text{مستقل} | \text{رأي دهد})}$$

$$= \frac{(0.46)(0.25)}{(0.46)(0.25) + (0.30)(0.62) + (0.24)(0.58)} = 0.331$$

$$P(\text{لیبرال} | \text{رأي دهد}) = \frac{(0.30)(0.62)}{(0.46)(0.25) + (0.30)(0.62) + (0.24)(0.58)} = 0.382 \quad \text{ب)$$

$$P(\text{محافظه کار} | \text{رأي دهد}) = \frac{(0.24)(0.58)}{(0.46)(0.25) + (0.30)(0.62) + (0.24)(0.58)} = 0.286 \quad \text{ج)$$

$$[P(\text{محافظه} | \text{رأي دهد}) + P(\text{لیبرال} | \text{رأي دهد}) + P(\text{مستقل} | \text{رأي دهد})] \times 100 \quad \text{د)}$$

$$= [(0.46)(0.25) + (0.30)(0.62) + (0.24)(0.58)] \times 100 = 48.62$$

\*-۱۶

- ۱۷- در یک دانشکده ، ۵۲ درصد از دانشجویان زن هستند. رشته اصلی ۵ درصد از دانشجویان این دانشکده کامپیوتر است ، ۲ درصد از دانشجویان زن رشته اصلی آنها

## فصل سوم

## حل المسائل - مبانی احتمال

کامپیوتر است اگر یک دانشجو را به تصادف انتخاب کنیم احتمال شرطی پیشامد های زیر را بدست آورید.

الف) این دانشجو زن باشد بشرط اینکه در رشته کامپیوتر تحصیل کند.

ب) این دانشجو در رشته کامپیوتر تحصیل کند بشرط اینکه دانشجو زن باشد.

$$\text{الف)} \quad P = \frac{(کامپیوتر \cap زن)}{(کامپیوتر | زن)} = \frac{(کامپیوتر \cap زن) P}{(کامپیوتر) p} = \frac{\left(\frac{0.1}{0.2}\right)}{\left(\frac{0.1}{0.3} + \frac{0.1}{0.2}\right)} = \frac{0.1}{4}$$

$$\text{ب)} \quad P = \frac{(زن \cap کامپیوتر)}{(زن)} = \frac{(زن | کامپیوتر) P}{(زن)} = \frac{\left(\frac{0.1}{0.2}\right)}{\left(\frac{0.1}{0.52}\right)} = \frac{1}{26}$$

۱۸ - در مورد حقوق روزانه ۵۰۰ زوج ازدواج کرده از آنها سوال کرده ایم . نتیجه اطلاعات بدست آمده در جدول زیر خلاصه شده است یعنی مثلاً در ۳۶ زوج، زن بیشتر از ۲۵۰۰۰ ریال و شوهر کمتر از آن در آمد دارد . مطلوب است:

زن	شوهر	
	بیش از ۲۵۰۰۰ ریال	کمتر از ۲۵۰۰۰ ریال
کمتر از ۲۵۰۰۰ ریال	۲۱۲	۱۹۸
بیش از ۲۵۰۰۰ ریال	۳۶	۵۴

الف) احتمال اینکه یک شوهر کمتر از ۲۵۰۰۰ ریال در آمد داشته باشد.

ب) احتمال شرطی اینکه زن بیش از ۲۵۰۰۰ ریال در آمد داشته باشد بشرط اینکه شوهر او نیز بیش از این مبلغ در آمد داشته باشد.

ج) احتمال شرطی اینکه زن بیش از ۲۵۰۰۰ ریال در آمد داشته باشد بشرط اینکه شوهر او کمتر از این مبلغ در آمد داشته باشد.

$$\text{الف)} \quad P = \frac{36}{500} + \frac{212}{500} = 0.496$$

$$\text{ب) } P = \frac{(\text{مرد بیشتر} \cap \text{زن بیشتر})}{(\text{مرد بیشتر} \cap \text{زن کمتر}) + (\text{مرد بیشتر} \cap \text{زن بیشتر})} = \frac{3}{14}$$

$$\text{ج) } P = \frac{(\text{مرد کمتر} \cap \text{زن بیشتر})}{(\text{مرد کمتر} \cap \text{زن کمتر}) + (\text{مرد کمتر} \cap \text{زن بیشتر})} = \frac{9}{62}$$

۱۹- احتمال اینکه یک باطری نو بیش از ۱۰۰۰۰ مایل کار کند برابر با  $1/8$  و احتمال اینکه بیش از ۲۰۰۰۰ مایل کار کند برابر با  $1/4$  و احتمال اینکه بیش از ۳۰۰۰۰ مایل کار کند برابر است با  $1/1$ . اگر باطری نو یک اتومبیل بعد از ۱۰۰۰۰ مایل هنوز کار کند. مطلوب است احتمال پیشامد های زیر:

الف) طول عمر این باطری بیش از ۲۰۰۰۰ مایل باشد.

ب) بقیه طول عمر آن بیش از ۲۰۰۰۰ مایل باشد.

الف) A - پیشامد اینکه طول عمر باطری بیش از ۲۰۰۰۰ مایل باشد.

B - پیشامد اینکه باطری نو بعد از ۱۰۰۰۰ مایل هنوز کار کند.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/8} = \frac{1}{2}$$

ب) C - پیشامد اینکه بقیه طول عمر آن بیش از ۲۰۰۰۰ مایل باشد.

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{1/1}{1/8} = \frac{1}{8}$$

\* - ۲۰

۲۱- از ظرفی که ۵ توب سفید و ۷ توب سیاه دارد هر مرتبه توبی را به تصادف انتخاب کرده، رنگ آن را بادداشت نموده و همراه دو توب هم رنگ دیگر در ظرف بر می گردانیم. احتمال پیشامد های زیر را محاسبه کنید.

الف) دو توب انتخاب شده اول سیاه و دو توب بعدی سفید باشند.

حل المسائل - مبانی احتمال

## فصل سوم

۴۰

ب) از چهار توب انتخاب شده اول ۲ توب سیاه انتخاب شده باشد

(الف)

$$P = \frac{7}{12} \times \frac{9}{14} \times \frac{5}{16} \times \frac{7}{18} = \frac{35}{768}$$

ب) انتخاب توبها به صورت زیر خواهد بود:

$$BBBB + BBBW + BBWB + BWBB + WBBA + BBWW$$

$$+BWBW + BWWB + WBWB + WWBB + WBBW$$

$$P(\text{لا}) = \left( \frac{7}{12} \times \frac{9}{14} \times \frac{11}{16} \times \frac{13}{18} \right) + \dots + \left( \frac{5}{12} \times \frac{7}{14} \times \frac{9}{16} \times \frac{7}{18} \right) = 0/746$$

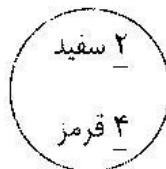
۲۲- ظرف I شامل ۲ توب سفید و ۴ توب قرمز است و ظرف II شامل ۱ توب سفید و یک توب قرمز است. یک توب را به تصادف از ظرف I انتخاب موده و در ظرف II قرار میدهیم و سپس یک توب از ظرف II انتخاب می کنیم. احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید

الف) توب انتخاب شده از ظرف II سفید باشد.

ب) توب منتقل شده سفید باشد بشرط اینکه توب انتخاب شده از ظرف II سفید باشد.

$$p = \left( \frac{2}{6} \times \frac{2}{3} \right) + \left( \frac{4}{6} \times \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{9} \quad (\text{الف})$$

$$p = \frac{\frac{2}{6} \times \frac{2}{3}}{\left( \frac{2}{6} \times \frac{2}{3} \right) + \left( \frac{4}{6} \times \frac{1}{3} \right)} = \frac{1}{2} \quad (\text{ب})$$



I



II

## حل المسائل - مبانی احتمال

## احتمال شرطی و استقلال

۴۱

۲۴ - هر یک از دو توب را سیاه یا طلایی رنگ زده و در یک طرف قرار می دهیم فرض

کنید احتمال اینکه توب سیاه رنگ شود  $\frac{1}{2}$  است و توبها مستقل از یکدیگر رنگ شوند.

الف) اگر بدانیم که رنگ طلائی استفاده شده ۱ حداقل یک توب طلائی رنگ زده شده است) احتمال شرطی اینکه هر دو توب طلائی رنگ شده باشند را بدست آورید.

ب) فرض کنید که ظرف کج شده و یک توب از آن خارج شود و رنگ آن طلائی باشد در این حالت احتمال اینکه هر دو توب طلائی باشند چقدر است؟ شرح دهد:

الف)  $A$  = پیش آمد اینکه هر دو طلایی ،  $B$  = پیش آمد اینکه از رنگ طلایی استفاده شود.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{هر دو طلایی}}{\text{یکی طلایی} + \text{یکی طلایی} + \text{هر دو طلایی}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

(ب)

$$P(\text{اولی طلایی} \cap \text{دومی طلایی}) = \frac{P(\text{اولی طلایی}) P(\text{دومی طلایی})}{P(\text{اولی طلایی})}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

\* - ۲۵

۲۶ - تصور کنید که ۵ درصد مردان و ۰.۲۵ درصد زنان بهمن کور رنگی دارند. اگر یک

فرد کور رنگ را به تصادف انتخاب کنیم احتمال اینکه این فرد مرد باشد چقدر است؟

فرض کنید تعداد مرد ها و زن ها برابر باشند. اگر تعداد مرد ها دو برابر تعداد زن ها باشد پاسخ چیست؟

قسمت اول )  $A$  = پیش آمد اینکه مرد باشد ،  $B$  = پیش آمد اینکه کور رنگ باشد.

## فصل سوم

## حل المسائل - مبانی احتمال

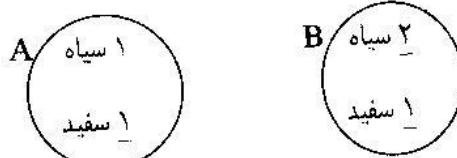
$$p(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.10}{0.10 + 0.02} = \frac{20}{21}$$

$$p(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2(0.10)}{2(0.10) + 0.02} = \frac{40}{41} \quad \text{قسمت دوم)$$

-۲۷- دو جعبه را در نظر بگیرید که در یکی از آنها یک مهره سیاه و یک مهره سفید و در دیگری ۲ مهره سیاه و یک مهره سفید قرار دارد یک جعبه را به تصادف انتخاب می کنیم و یک مهره را به تصادف از آن بیرون می آوریم احتمال اینکه این مهره سیاه باشد را بدست آورید. اگر مهره انتخاب شده سفید باشد احتمال اینکه از جعبه اول انتخاب شده باشد را بدست آورید.

$$P(\text{مهرباند}) = p(\text{جعبه سیاه} | A) + p(\text{جعبه سیاه} | B) \quad \text{قسمت اول)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}$$



$$P(A | \text{سفید}) = \frac{P(A \cap \text{سفید})}{P(\text{سفید})} = \frac{P(A \cap \text{سفید})}{p(\text{سفید} | A)p(A) + p(\text{سفید} | B)p(B)} \quad \text{قسمت دوم)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{5}$$

-۲۸- لغت (سختی یا شدت) را آمریکایی ها بصورت *rigour* و انگلیسی ها بصورت *rigor* می نویسند. مردی که در یک هتل اقامت دارد، این لغت را می نویسد. یکی از حروف آن را به تصادف انتخاب کرده و مشاهده میکنیم که حرف صدا دار است. اگر ۴۰ درصد افراد ساکن در این هتل انگلیسی و ۶۰ درصد آمریکایی باشند، احتمال اینکه نویسنده لغت انگلیسی باشد را بدست آورید.

## حل المسائل - مبانی احتمال

## احتمال شرطی و استقلال

۴۳

A = پیشامد اینکه حرف انگلیسی باشد ، B = پیشامد اینکه صدادار باشد.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\binom{2}{6} \cdot \binom{1}{4}}{\binom{3}{6} \cdot \binom{1}{4} + \binom{2}{5} \cdot \binom{1}{6}} = \frac{5}{11}$$

۲۹- ظرف A شامل ۲ توب سفید و یک توب سیاه است و در ظرف B، ۱ توب سفید و ۵ توب سیاه قرار دارد یک توب را به تصادف از ظرف A انتخاب کرده آن را در B قرار می‌دهیم. آنگاه یک توب از ظرف B انتخاب می‌کنیم ، توب انتخاب شده سفید است. احتمال اینکه توب منتقل شده نیز سفید بوده باشد را بدست آورید.

A = پیشامد اینکه توب منتقل شده سفید باشد ، B = پیشامد اینکه توب سفید انتخاب شود.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\binom{2}{2} \binom{2}{7}}{\binom{2}{2} \binom{2}{7} + \binom{1}{2} \binom{1}{7}} = \frac{4}{5}$$

۳۰- در مثال ۵-۳ فرض کنید شواهد جدیدی بستگی به تفسیر آن دارد و فقط ۹۰ درصد محتمل است که متهم این خصوصیت را داشته باشد. در این حالت احتمال اینکه متهم گناهکار باشد را حساب کنید.

A = پیشامد اینکه متهم گناهکار باشد ، B = پیشامد اینکه دارای ویژگی باشد.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A) + P(B/A')P(A')} = \frac{(0/9)(0/6)}{(0/9)(0/6) + (0/2)(0/4)}$$

$$= \frac{27}{31}$$

۳۱- در یک کلاس احتمال با ۳۰ دانشجو، وضعیت درس بدین صورت است که ۱۵ نفر خوب، ۱۰ نفر متوسط، و ۵ نفر ضعیف هستند. شما (عنوان یک کارشناس) از اعداد فوق اطلاع دارید ولی نمی‌دانید که کدام کلاس چنین وضعیت‌هایی را دارند. اگر یک دانشجو را به تصادف از هر کلاس انتخاب و آزمایش ساده نموده و مشاهده کنید که دانشجوی

## فصل سوم

## حل المسائل - مبانی احتمال

انتخابی از کلاس A متوسط و دانشجوی انتخابی از کلاس B ضعیف است. احتمال اینکه کلاس A کلاس برتر باشد چقدر است؟

$A$  = پیشامد اینکه A کلاس برتر ،  $B$  = پیشامد اینکه B کلاس برتر ،  $P$  = پیشامد اینکه فرد انتخاب شده از کلاس B ضعیف

$$P(A|P,q) = \frac{P(A \cap P,q)}{P(P,q)} = \frac{P(P,q/A)P(A)}{P(P,q/A)P(A) + P(P,q/B)P(B)} = ?$$

$$= \frac{\binom{10}{30} \binom{15}{30}}{\binom{10}{30} \binom{15}{30} + \binom{10}{30} \binom{5}{30}} = \frac{3}{4}$$

۳۲ - فروشگاههای A و B و C بترتیب ۵۰، ۷۰ و ۱۰۰ نفر کارمند دارند از این کارمندان بترتیب ۷۵٪، ۶۰٪ و ۷۰٪ زن هستند. اگر امکان استعفا بین کارمندان یکسان باشد و یک کارمند زن استعفا دهد، با چه احتمالی وی کارمند فروشگاه ( ) است؟

الف)  $W$  = پیشامد زن بودن ،  $A$  = پیشامد کارمند A بودن ،  
 $B$  = پیشامد کارمند B بودن ،  
 $C$  = پیشامد کارمند C بودن .

$$P(C|W) = \frac{P(C \cap W)}{P(W)} = \frac{P(W/C)P(C)}{P(W/A)P(A) + P(W/B)P(B) + P(W/C)P(C)} = \frac{1}{2}$$

۳۳ - الف) فردی در جیب خود یک سکه سالم و یک سکه که دو طرفش شیر است نگه می دارد؛ او یکی از سکه ها را به تصادف انتخاب و آن را پرتاب می کند، اگر شیر ظاهر شود با چه احتمالی سکه سالم انتخاب شده است؟

ب) فرض کنید وی همان سکه را یک مرتبه دیگر پرتاب کند و دوباره شیر ظاهر شود. حال احتمال اینکه این سکه سالم باشد چقدر است؟

$A$  = پیشامد سالم بودن سکه ،  $A'$  = پیشامد ناسالم بودن سکه ،  
 $B$  = پیشامدن ظاهر شدن شیر

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A) + P(B/A')P(A')} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

ب) چون دو آزمایش مستقل هستند و نتیجه هر یک در دیگری اثری ندارد داریم:

$$P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \quad (\text{در مرتبه دوم هم شیر ظاهر شود})$$

٣٤ - ظرف  $A$  ۵ توب سفید و ۷ توب سیاه دارد، در ظرف  $B$  نیز ۳ توب سفید و ۱۲ توب سیاه قرار دارد. سکه ای را پرتاب کرده اگر شیر ظاهر شود یک توب از ظرف  $A$  و اگر خط ظاهر شود یک توب از ظرف  $B$  انتخاب می کنیم. فرض کنید که توب انتخاب شده سفید باشد، احتمال اینکه سکه خط آمده باشد را بدست آورید.

$$\begin{aligned} P &= \frac{P(A \cap \text{سفید})}{P(\text{خط})} = \frac{P(\text{سفید} | \text{خط})}{P(\text{خط})} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{15}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{15}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{12}{37} \end{aligned}$$

٣٦ - یک نمونه ۳ تایی انتخاب شده بصورت زیر را در نظر بگیرید: از ظرفی که ۵ توب سفید و ۷ توب قرمز دارد در هر مرحله یک توب به تصادف انتخاب نموده رنگ آن را یادداشت و آن را همراه با یک توب از همان رنگ به ظرف باز می گردانیم احتمال اینکه نمونه، شامل  $i$  توب سفید باشد را بدست آورید.

( $i = 0, 1, 2$ )

$$P(i=0) = \frac{7}{12} \times \frac{8}{13} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{13}$$

چون ممکن است بار اول، دوم و یا سوم انتخاب شود.

$$P(i=1) = \frac{5}{12} \times \frac{7}{13} \times \frac{8}{14} = \frac{5}{39}$$

داریم:

$$P(i=1) = 3 \times \frac{5}{39} = \frac{5}{13}$$

$$P(i=2) = \left( \frac{5}{12} \times \frac{6}{13} \times \frac{7}{14} \right) + \left( \frac{5}{12} \times \frac{7}{13} \times \frac{6}{14} \right) + \left( \frac{7}{12} \times \frac{5}{13} \times \frac{6}{14} \right) = \frac{15}{52}$$

$$P(i=3) = \left( \frac{5}{12} \times \frac{6}{13} \times \frac{7}{14} \right) + \left( \frac{5}{12} \times \frac{6}{13} \times \frac{7}{14} \right) + \left( \frac{5}{12} \times \frac{6}{13} \times \frac{7}{14} \right) = \frac{15}{52}$$

۲۷ - ظرفی شامل  $b$  توب سیاه و  $r$  توب قرمز است. یکی از توبها را به تصادف انتخاب می کنیم اما وقتی که آن را به ظرف بر می گردانیم  $c$  توب دیگر از همان رنگ را نیز در ظرف می گذاریم حال فرض کنید توب دیگر را انتخاب می کنیم. نشان دهید، احتمال اینکه

توب انتخاب شده اول سیاه بوده بشرط اینکه توب دوم قرمز باشد برابر است

$$\frac{b}{b+r+c} = \frac{P(\text{اول سیاه} \cap \text{دوم قرمز})}{P(\text{اول سیاه})} = \frac{P(\text{دوم قرمز} \cap \text{اول سیاه})}{P(\text{اول قرمز})} = p$$

$$= \frac{\left(\frac{b}{b+r}\right)\left(\frac{r}{b+r+c}\right)}{\left(\frac{b}{b+r}\right)\left(\frac{r}{b+r+c}\right) + \left(\frac{b}{b+r}\right)\left(\frac{r+c}{b+r+c}\right)} = \frac{b}{b+r+c}$$

۲۹ - سه آشپز  $A$  و  $B$  و  $C$  هر کدام یک خاصی را تهیه میکند که با احتمال های  $0.102$ ،  $0.105$ ،  $0.103$  یک آنها هنگام پخت خراب می شود. اگر در رستورانی که آنها کار می کنند، آشپز  $A$  درصد  $20$  درصد و آشپز  $B$  درصد  $20$  درصد از یک ها را پخت کنند، چه نسبتی از یک های خراب توسط آشپز  $A$  تهیه می شود.

$A$  و  $B$  و  $C$  = پیشامدهای تهیه یک توسط آشپزهای  $A$  و  $B$  و  $C$ .  $R$  = بیشامد خراب

شدن یک

$$P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) + P(R|C)P(C)}$$

$$= \frac{(0.102)(0.105)}{(0.102)(0.105) + (0.103)(0.102) + (0.105)(0.102)} = \frac{10}{29}$$

نسبت مورد نظر عبارت است از :

$$P(A|R) \times 100 = 34.48$$

-۴۰ در جعبه ای سه سکه وجود دارد که یکی از آنها هر دو طرف شیر، دیگری یک سکه سالم و سومی سکه ای اریب است که هنگام پرتاب با احتمال ۷۵٪ شیر ظاهر می شود وقتی که یکی از سکه ها را به تصادف انتخاب کرده و پرتاب می کنیم، شیر ظاهر می شود احتمال اینکه سکه دو طرف شیر انتخاب شده باشد چقدر است؟

A = پیشامد اینکه دو طرف شیر باشد ، B = پیشامد اینکه شیر ظاهر شود .  
C = پیشامد اینکه سکه سالم باشد ، D = پیشامد اینکه سکه با ۷۵٪ شیر انتخاب شود.

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|C)P(C) + P(B|D)P(D)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

\* -۴۱

-۴۲ فرض کنید ۱۰ سکه داریم که اگر سکه ۱ام را پرتاب کنیم با احتمال  $\frac{1}{10}$  (۱۰٪ و ۹۰٪) شیر ظاهر می شود وقتی که یکی از سکه ها را به تصادف انتخاب کرده و آن را پرتاب می کنیم شیر ظاهر می شود. احتمال شرطی اینکه این سکه، پنجمین سکه باشد را بدست آورید.

$$\begin{aligned} P &= \frac{5}{10} = \frac{\text{(شیر ظاهر می شود | سکه پنجم)}}{\text{(شیر ظاهر می شود)}} = \frac{\text{(شیر ظاهر می شود | سکه پنجم)}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10}} \\ &= \frac{1}{11} \end{aligned}$$

\* -۴۳

## فصل سوم

## حل المسائل - مبانی احتمال

۴۴ - دو کمد یکسان هر کدام دارای دو کشو هستند در هر یک از کشوهای کمد A یک سکه نقره وجود دارد، اما در یکی از کشوهای کمد B یک سکه طلا و در کشوی دیگر آن یک سکه نقره است. یکی از کمدها را به تصادف انتخاب نموده و یکی از کشوهای آن را باز می کنیم و یک سکه نقره بدست می آوریم. احتمال اینکه در کشوی دیگر این کمد یک سکه نقره باشد چقدر است؟

$M$  = پیشامد اینکه اولین سکه نقره باشد.

$N$  = پیشامد اینکه دومین سکه نقره باشد

و  $A$  و  $B$  = پیشامدهای اینکه سکه انتخابی از کمدهای

کمد A	نقره	نقره
	نقره	طلا
کمد B	نقره	نقره
	نقره	نقره

و  $A$  باشند.

$$P(N|M) = \frac{P(N \cap M)}{P(M)} = \frac{P(M|A)P(A)}{P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B)}$$

بدیهی است که :

$$P(M|N)P(N) = P(M|A)P(A)$$

چون در کمد A هر دو کشو دارای سکه نقره هستند.

$$P(N|M) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

۴۵ - فرض کنید آزمایش مبتلا به بیماری سرطان برای کسانی که بیماری دارند و کسانی که سالم هستند دارای دقت ۹۵/۰ باشد. اگر ۱/۴ درصد افراد جامعه دارای بیماری سرطان باشند، مطلوب است احتمال اینکه فردی که مورد آزمایش قرار گرفته دارای بیماری سرطان باشد بشرط اینکه نتیجه از مایش مثبت باشد.

$$P(M|N)P(N) = \frac{(0.95)(0.05)}{(0.95)(0.05) + (0.995)(0.95)} = \frac{19}{268}$$

۴۶ - تصور کنید که یک موسسه بیمه افراد جامعه را به سه گروه افراد با ریسک بالا افراد با ریسک متوسط و افراد با ریسک پایین تقسیم بندی نموده و اطلاعات وی نشان می دهد

که احتمال تصادف کردن این گروه‌ها در طول یک سال بترتیب  $0.05$  و  $0.30$  است. اگر  $20$  درصد افراد جامعه ریسک بالا،  $50$  درصد ریسک متوسط و  $20$  درصد ریسک پایین باشند. چه نسبتی از افراد جامعه در یک سال تصادف دارند؟ اگر فرد بیمه شده  $A$  در یک سال تصادف نداشته باشد، احتمال اینکه وی از گروه با ریسک متوسط باشد را بدست آورید.

$$P(\text{تصادف}) = 0.175 - 0.05 \times 0.30 + 0.05 \times 0.20 + 0.05 \times 0.20 = 0.175$$

نسبت مورد نظر عبارت است از :

قسمت دوم)  $A$  = پیشامد اینکه مرد از گروه باریسک متوسط باشد،

$B$  = پیشامد اینکه در یک سال تصادف نداشته باشد.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{(0.05)(0.175)}{(0.20)(0.175) + (0.05)(0.175) + (0.05)(0.175)} = \frac{17}{33}$$

\* - ۴۷

۴۸ - در یک کلاس  $4$  دانشجوی پسر سال اول،  $6$  دانشجوی دختر سال اول و  $6$  دانشجوی پسر سال دوم ثبت نام کرده‌اند. چند دانشجوی دختر سال دوم باستی در این کلاس ثبت نام کنند تا در صورت انتخاب یک دانشجو به تصادف، پیشامد‌های جنس و سال تحصیلی مستقل باشند؟

	سال دوم		
	۶ پسر		
X دختر			

\* - ۴۹

۵۰ - یک مدل ساده برای تغییرات نرخ سهام بازار بورس بدین ترتیب است که در هر روز، نرخ سهام یک واحد با احتمال  $P$  افزایش و با احتمال  $1-P$  کاهش می‌یابد. همچنین در روزهای مختلف مستقلند.

الف) احتمال اینکه بعد از دو روز نرخ سهام همان قیمت اولیه باشد چقدر است؟

## فصل سوم

## حل المسائل - مبانی احتمال

ب) احتمال اینکه بعد از ۳ روز نرخ سهام به اندازه واحد افزایش یافته باشد چقدر است؟

ج) بشرط اینکه بعد از ۳ روز نرخ سهام یک واحد افزایش یافته باشد با چه احتمالی در اولین روز یک واحد افزایش داشته است؟

$$P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (\text{نرخ سهام ثابت}) \quad \text{(الف)}$$

$$P = \frac{3}{8} \quad (\text{یک واحد افزایش}) \quad \text{(ب) (با رسم نمودار درختی)}$$

ج) A - پیشامد اینکه در اولین روز یک واحد افزایش داشته باشیم.

B - پیشامد اینکه بعد از سه روز یک واحد افزایش داشته باشیم.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

۵۱ - رنگ چشم یک انسان بوسیله یک زوج ژن تعیین میشود بطوریکه اگر هر دو ژن چشم ، آبی باشند رنگ چشم فرد آبی و اگر هر دو ژن چشم، قهوه ای باشند رنگ چشم فرد قهوه ای و اگر یک ژن آبی و یک ژن قهوه ای باشد رنگ چشم قهوه ای خواهد بود(به این دلیل که رنگ قهوه ای غالب است) یک نوزاد یک ژن را به طور مستقل از مادر و ژن دیگر را از پدر می گیرد، که بطور هم شانس میتواند ژن آبی یا ژن قهوه ای باشد. فرض کنید فردی والدین او دارای چشم قهوه ای هستند ولی خواهر آن فرد چشم آبی دارد.

الف) با چه احتمالی آن فرد مالک ژن چشم آبی است.

فرض کنید همسر آن چشم آبی باشد.

ب) احتمال اینکه اولین فرزند آنها چشم آبی باشد چقدر است؟

ج) اگر اولین فرزند آنها چشمان قهوه ای داشته باشد با چه احتمالی فرزند بعدی آنها نیز چشم قهوه ای خواهد داشت.

الف) با رسم نمودار درختی مشاهده میشود که :

$$P = \frac{2}{3} \text{ (زن آبی)}$$

ب)  $A$  = پیشامد اینکه زن آبی از مادر باشد.  $B$  = پیشامد اینکه زن آبی از پدر باشد.

$$\begin{aligned} P(B) &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)(\cdot) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$P(A) = 1$$

$$P = P(A)P(B) = (1)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \quad (\text{فرزند اول چشم آبی باشد})$$

ج)  $A$  = پیشامد اینکه فرزند اول چشم قهوه ای

$B$  = پیشامد اینکه فرزند دوم چشم قهوه ای

$C$  = پیشامد اینکه پدر (فرد) چشم قهوه ای باشد.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B|C)P(C)}{P(A|C)P(C)} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{4}$$

۵۲ - فرد  $A$  و  $B$  برای تیر اندازی مسابقه می دهند. فرض کنید هر شلیک  $A$  با احتمال  $P_1$  به هدف اصابت کند و هر شلیک  $B$  با احتمال  $P_2$  به هدف بخورد. بعلاوه فرض کنید آنها بطور همزمان بطرف یک هدف تیر اندازی می کنند اگر تیری به هدف خورده باشد مطلوب است:

الف) احتمال اینکه هر دو تیر به هدف خورده باشند.

ب) تیر  $A$  به هدف خورده باشد

چه فرض استقلالی را در نظر گرفته اید.

$$P = \frac{P_1 P_2}{P_1 P_2 + P_1(1-P_2) + P_2(1-P_1)} \quad \text{الف)$$

$$P = \frac{P_1 P_2 + P_1(1-P_2)}{P_1 P_2 + P_1(1-P_2) + P_2(1-P_1)} \quad \text{ب)}$$

۵۴- در یک مسابقه خانوادگی قرار است یک سوال به یک زوج داده شود که پاسخ آن ((صحیح )) یا ((غلط)) است . اگر زن و شوهر بطور مستقل پاسخ مناسب را احتمال  $P$  بدهند . کدامیک از حالات زیر برای برنده شدن زوج بهتر است ؟

الف) یکی از آنها را انتخاب و اجازه دهیم او پاسخ دهد .

ب) هر دو نفر سوال را بررسی نموده و پس از توافق ، یکی از آنها پاسخ را اعلام نماید و یا اگر توافق نداشتند یک سکه را پرتاب و براساس آن نتیجه را پاسخ دهند .

الف- احتمال انتخاب هریک از زن و مرد  $\frac{1}{2}$  بوده و احتمال اینکه برنده شوند یعنی به سوال پاسخ صحیح بدهند  $P$  و احتمال پاسخ غیر صحیح دادن  $P-1$  می باشد لذا احتمال برنده شدن برابر است با :

$$P = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P = P$$

$B$  )  $A$  = پیشامد برنده شدن ،  $B'$  = پیشامد توافق داشتن ،  $B$  = پیشامد عدم توافق

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B') \\ &= \frac{P(B|A)P(A)P(B)}{P(B)} + \frac{P(B'|A)P(A)P(B')}{P(B')} \\ &= \left(\frac{1}{2}P\right)(P) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(P) + \frac{1}{2} = \frac{2P+1}{4} \end{aligned}$$

۵۵- در مساله ۵۴ ، اگر  $P = 0.6$  باشد و آنها روش (ب) را بکار ببرند ، احتمال شرطی

اینکه زوج پاسخ صحیح دهند بشرط اینکه ،

الف) آنها به توافق برسند .

ب) آنها به توافق نرسند .

را بدست آورید .

$A$  = پیشامد پاسخ صحیح ،  $A'$  = پیشامد پاسخ غلط ،  $B$  = پیشامد توافق

پیشامد عدم توافق =  $B'$ 

$$P(A|B) = \frac{P(A|B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')} \quad (\text{الف})$$

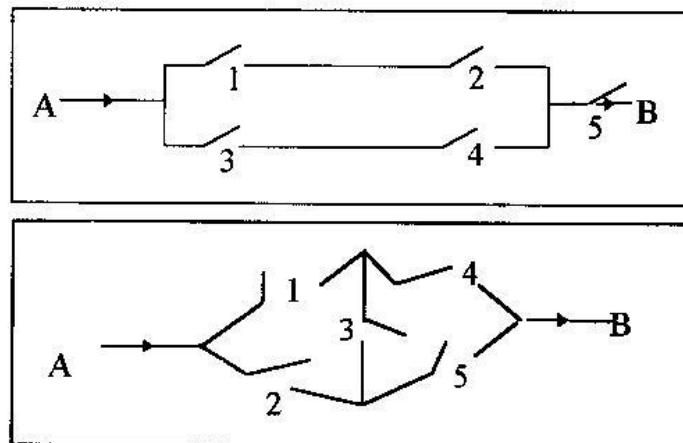
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{24}} = \frac{9}{13}$$

$$P(A|B') = \frac{P(A|B')}{P(B')} = \frac{P(B'|A)P(A)}{P(B'|A)P(A) + P(B'|A')P(A')} \quad (\text{ب})$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

\* - ۵۶

احتمال بسته شدن رله ۵ ام (۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ = ۱) در مدارهای زیر برابر با  $P_{57}$  است. اگر همه رله ها بطور مستقل عمل کنند، احتمال اینکه جریان از نقطه  $A$  به نقطه  $B$  عبور کند را در هر یک از مدارهای زیر را بدست آورید.



راهنمایی: روی پیشامد اینکه رله ۳ عمل نکند مشروط کند

الف) شکل اول :  $P_5 = P_1 P_3 P_5$  (عبور جریان)

## فصل سوم

## حل المسائل - مبانی احتمال

ب) شکل دوم :

$$P = P_1 P_4 + P_2 P_5$$

(۵۸) - یک سیستم مهندسی که از  $n$  جزء تشکیل شده باشد را یک سیستم ((K) از  $n$ ) می‌گویند، ( $k \leq n$ ) هر گاه کار کردن سیستم مشروط به کار کردن حداقل  $k$  جزء باشد فرض کنید همه اجزاء بطور مستقل کار کنند.

الف) اگر  $i$  امین جزء با احتمال  $p_i$  و  $2 \leq i \leq n$  کار کند احتمال کار کردن یک سیستم ((2 از 4)) را بدست آورید.

ب) قسمت (الف) را برای یک سیستم ((3 از 5)) تکرار کنید.

ج) اگر  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  احتمال کار کردن یک سیستم (( $k$  از  $n$ )) را بدست آورید.

الف) چون احتمال کار کردن یک سیستم 2 از 4 را می‌خواهیم  $\binom{4}{2}$  حالت خواهیم داشت:

$$P = P_1 P_2 (1-P_3)(1-P_4) + P_1 P_3 (1-P_2)(1-P_4) + P_1 P_4 (1-P_2)(1-P_3) \\ + P_2 P_3 (1-P_1)(1-P_4) + P_2 P_4 (1-P_1)(1-P_3) + P_3 P_4 (1-P_1)(1-P_2)$$

ب) این قسمت ۱۰ جمله خواهد داشت زیرا تعداد ترکیبات ۳ از ۵ مدنظر است  $\binom{5}{3}$

$$P = P_1 P_2 P_3 (1-P_4)(1-P_5) + \dots + P_3 P_4 P_5 (1-P_1)(1-P_2)$$

ج) بدیهی است احتمال کار کردن یک سیستم (N از K)،  $\binom{N}{K}$  جمله خواهد داشت.

\* - ۵۹

۶۰ - با احتمال  $\frac{1}{2}$ ، ملکه دارای زن هموفیلی است. اگر او دارای زن باشد آنگاه هر فرزند

او با احتمال  $\frac{1}{2}$  بیماری هموفیلی را خواهد داشت اگر ملکه سه فرزند سالم داشته باشد احتمال اینکه او دارای زن هموفیلی باشد چقدر است؟ اگر ملکه فرزند چهارمی بدنیا آورد احتمال اینکه او هموفیلی باشد چقدر است؟

$A =$  پیشامد اینکه ملکه دارای زن هموفیلی باشد،  $B_1, B_2, B_3, B_4 =$  پیشامدهای

اینکه فرزندان دارای زن هموفیلی باشند.

$$\begin{aligned}
 P(A|B_1, B_2, B_3) &= \frac{P(A \cap B_1, B_2, B_3)}{P(B_1, B_2, B_3)} && \text{قسمت اول (} \\
 &= \frac{P(A \cap B_1)P(A \cap B_2)P(A \cap B_3)}{P(B_1)P(B_2)P(B_3)} = \frac{P(B_1|A)P(A)P(B_2|A)P(A)P(B_3|A)P(A)}{P(B_1)P(B_2)P(B_3)} = \frac{1}{\lambda} && \text{قسمت دوم (} \\
 p(B_1) &= P(B_1|B'_2)P(B'_2) = P(B_1|B'_2)P(B'_2|B'_3)P(B'_3) && \text{قسمت دوم (} \\
 &= P(B_1|B'_2)P(B'_2|B'_3)P(B'_3|B'_1)P(B'_1) \approx P(B_1|B'_2)P(B'_2|B'_3)P(B'_3|B'_1) p(B_1|A)P(A) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1) = \left(\frac{1}{16}\right)
 \end{aligned}$$

\*-۶۱

\*-۶۲

۶۳ - فرض کنید هر طفلي که به دنيا مي آيد با شанс برابر، پسر یا دختر و مستقل از جنس سایر فرزندان باشد. برای زوجی که ۵ فرزند دارند، احتمال پیشامدهای زیر بدست آوريد.

الف) همه فرزندان از یک جنس باشند.

ب) ۲ فرزند بزرگتر پسر و دو فرزند دیگر دختر باشند.

ج) دقیقاً ۳ فرزند پسر باشد.

د) ۲ فرزند بزرگتر دختر باشند.

ه) حداقل یک فرزند دختر باشد.

الف) فضای نمونه ای این آزمایش مانند فضای نمونه ای آزمایش پرتاپ سکه خواهد

بود.  $2^5 = 32$

که در یکی از این حالات همگی پسر و در یکی همگی دختر خواهند بود پس احتمال مورد

نظر عبارت است از :

$$P(A) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}$$

ب) تنها در یکی از این حالتها سه فرزند اول پسر و دو فرزند دیگر دختر هستند.

$$P(B) = \frac{1}{32}$$

$$\binom{5}{2} = 10$$

ج) تعداد حالت‌های انتخاب سه فرزند از ۵ فرزند عبارتست از :

$$P(C) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

پس احتمال مورد نظر برابر است با :

د) چون تکلیف دو فرزند اول شخص است لذا سه فرزند دیگر به ۲۳ حالت قرار

$$P(D) = \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$$

می‌گیرند:

ه) مشخص است که تنها در یکی از این ۲۲ حالت همگی پسر هستند و در ۳۱ حالت

$$P(H) = \frac{31}{32}$$

دیگر حداقل یک دختر وجود دارد پس احتمال مورد نظر عبارتست از :

۶۴ - احتمال بردن در یک مرتبه پرتاب یک تاس برابر با  $p$  است. شخص  $A$  تاس را

پرتاب می‌کند و اگر موفق نشود آن را به شخص  $B$  می‌دهد که او برای برنده شدن پرتاب

کند.  $A$  بازی را ادامه می‌دهند، تا یکی از آنها برنده شود. احتمال برنده شدن هر کدام را

بدست آورید. مسأله را برای وقتی که  $K$  بازیکن هستند تکرار کنید.

با رسم نمودار درختی مشخص می‌شود که :

۶۵ - مسأله ۶۴ را با این فرض که اگر  $A$  تاس را پرتاب کند با احتمال  $P_1$  برنده شود و اگر

تاس را پرتاب کند با احتمال  $P_2$  برنده شود. تکرار کنید.

$$P(A) = (1 - P_1)^{\frac{N-1}{2}} \times (1 - P_2)^{\frac{N-1}{2}} \times P_1$$

احتمال برنده شدن  $A$  برابر است با :

$$P(B) = (1 - P_1)^{\frac{N}{2}} \times (1 - P_2)^{\frac{N-2}{2}} \times P_2$$

احتمال برنده شدن  $B$  برابر است با :

۶۶ - سه بازیکن بطور متوالی سکه ای را پرتاب می‌کنند. سکه پرتاب شده توسط  $A$  و

$C$  بترتیب با احتمال  $P_1$ ،  $P_2$  و  $P_3$  شیر ظاهر می‌شود. اگر یکی از بازیکن‌ها نتیجه ای

متفاوت از دو بازیکن دیگر بدست آورد. آنگاه او به عنوان فرد تکی از بازی خارج می‌شود

اگر هیچکس تکی نباشد بازی ادامه می‌یابد تا اینکه فرد تک مشخص شود. احتمال اینکه  $A$

فرد تک باشد چقدر است؟

$$P = P_1(1-P_1)P_2P_3 + P_1(1-P_1)(1-P_2) \Rightarrow \text{فرد } A \text{ نک باشد}$$

۶۷ - فرض کنید  $E$  و  $F$  دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش باشند. نشان دهید که اگر آزمایش‌های ساده مستقل از این نوع را تکرار کنیم آنگاه  $E$  قبل از  $F$  با احتمال  $P(E)/[P(E)+P(F)]$  اتفاق می‌افتد.

دو پیشامد ناسازگارند وقتی که:  $P(E \cap F) = 0$  لذا داریم:

$$S = P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

پس احتمال اینکه  $E$  قبل از  $F$  اتفاق افتد برابر است با:

$$P(X) = \frac{P(E)}{P(E)+P(F)}$$

۶۸ - وقتی که  $A$  و  $B$  سکه هایی را پرتاب می‌کنند، کسی که سکه اش به خط مشخص شده ای نزدیک تر باشد برنده است و یک ریال از دیگری دریافت می‌کند. اگر  $A$  با ۳ ریال و  $B$  با ۷ ریال بازی را شروع کنند، احتمال اینکه  $A$  همه پولها را ببرد در صورتیکه آنها مهارت بیکسانی داشته باشند را بدست آورید. اگر  $A$  بازیکن بهتری باشد بطوریکه ۶۰٪ اوقات برنده شود آنگاه احتمال مربوطه را محاسبه کنید.

الف) در هر مرحله از مسابقه احتمال برد فرد  $A$   $\left(\frac{1}{2}\right)$  می‌باشد چون مهارت هر دو برابر

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{است پس احتمال اینکه } A \text{ همه پولها را ببرد عبارت است از:}$$

$$P(A) = (0.6)^n \quad \text{ب) در هر مرحله احتمال برد } A, (0.6) \text{ است پس:}$$

\* - ۶۹

\* - ۷۰

\* - ۷۱

\* - ۷۲

۷۳ - ناس  $A$  دارای ۴ وجه قرمز و ۲ وجه سفید و ناس  $B$  دارای ۲ وجه قرمز و ۴ وجه سفید است. یک سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر شیر ظاهر شود بازی را با ناس  $A$  و اگر خط ظاهر شود با ناس  $B$  بازی را انجام می‌دهیم.

الف) نشان دهید که احتمال قرمز آمدن در هر پرتاب  $\frac{1}{2}$  است.

ب) اگر دو پرتاب اولیه قرمز باشد احتمال اینکه نتیجه سومین پرتاب قرمز باشد چقدر است؟

ج) اگر دو پرتاب اولیه قرمز ظاهر سود. احتمال اینکه تاس A پرتاب شده باشد را بدست آورید.

$$B = \text{پیشامد وجه قرمز تاس } A \quad \text{(الف)}$$

$$R = \text{پیشامد رو شدن شیر، } T = \text{پیشامد روشدن خط، } H = \text{پیشامد قرمز بودن}$$

$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B)$$

$$= P(R|A)P(A|H)P(H) + P(R|B)P(B|T)P(T)$$

$$= \left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

ب)  $R_3, R_2, R_1$  - پیشامدهای اینکه اولین، دومین و سومین پرتاب قرمز باشند.

$$\begin{aligned} P(R_1|R_1, R_2) &= \frac{P(R_1 \cap R_2, R_3)}{P(R_1, R_2)} \\ &= \frac{P(R_1, R_2, R_3|A)P(A) + P(R_1, R_2, R_3|B)P(B)}{P(R_1, R_2|A)P(A) + P(R_1, R_2|B)P(B)} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$P(A|R_1, R_2) = \frac{P(A \cap R_1, R_2)}{P(R_1, R_2)} \quad \text{(ج)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)}{\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{16}{72}}{\frac{20}{72}} = \frac{4}{5}$$

۷۹- متهمنی توسط سه قاضی محاکمه میشود، گناهکار اعلام می شود اگر حداقل ۲ نفر رأی به گناهکاری او بدهند . فرض کنید وقتی که متهم واقعاً گناهکار باشد هر یک از قضات بطرز مستقل با احتمال  $\frac{1}{7}$  رأی به گناهکاری او بدهند و هر گاه متهم واقعاً بگناه باشد احتمال رأی به گناهکاری توسط هر قاضی به  $\frac{1}{2}$  کاهش یابد اگر  $\frac{1}{2}$  درصد از متهمنان گناهکار باشند احتمال شرطی اینکه قاضی سوم رأی به گناهکاری بدهد را بشرط هر یک از حالات زیر بدست آورید.

الف) قاضی اول و دوم رأی به گناهکاری داده اند.

ب) یکی از دو قاضی اول و دوم رأی به گناهکاری دیگری رأی به بی گناهی داده اند.

ج) قاضی اول و دوم هر دو رأی به بی گناهی داده اند.

اگر  $B_1 = 1$  و  $B_2 = 2$  و  $B_3 = 3$  نشان دهنده پیشامدی باشد که قاضی ۱ ام رأی به گناهکاری بدهد.

آیا این پیشامد ها مستقلند؟ آیا پیشامد ها مشروط مستقلند؟ (شرح دهید)

اگر فرض کنیم  $A_i$  ها پیشامد های قاضی ها باشند ،  $B =$  پیشامد گناهکار ،  $B' =$  پیشامد بیگناه

(الف)

$$\begin{aligned} P(A_1 | A_1, A_2) &= \frac{P(A_1, A_2, A_1)}{P(A_1, A_2)} \\ &= \frac{P(A_1, A_2, A_1 | B)P(B) + P(A_1, A_2, A_1 | B')P(B')}{P(A_1, A_2 | B)P(B) + P(A_1, A_2 | B')P(B')} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^2 \left(\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{7}\right)^2 \left(\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{97}{142} \end{aligned}$$

(ب)

$$P(A_1 | A_1, A_2') = \frac{P(A_1, A_2, A_1')}{P(A_1, A_2')}$$

## فصل سوم

## حل المسائل - مبانى احتمال

$$\begin{aligned}
 &= \frac{P(A_r A_i A_r' | B) P(B) + P(A_r A_i A_r' | B') P(B')}{P(A_r A_i' | B) P(B) + P(A_r A_i' | B') P(B')} \\
 &= \frac{(\cdot / ٤)(\cdot / ٣)(\cdot / ٢)(\cdot / ٧) + (\cdot / ٣)(\cdot / ٢)(\cdot / ٨)(\cdot / ٣)}{(\cdot / ٤)(\cdot / ٣)(\cdot / ٧) + (\cdot / ٣)(\cdot / ٨)(\cdot / ٣)} \\
 &= \frac{١٨}{٢٦}
 \end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned}
 P(A_r | A_i' A_r') &= \frac{P(A_r, A_i', A_r')}{P(A_i', A_r')} \\
 &= \frac{(\cdot / ٤)(\cdot / ٣)(\cdot / ٢)(\cdot / ٧) + (\cdot / ٣)(\cdot / ٨)(\cdot / ٨)(\cdot / ٣)}{(\cdot / ٣)(\cdot / ٣)(\cdot / ٧) + (\cdot / ٨)(\cdot / ٨)(\cdot / ٣)} \\
 &= \frac{٣٣}{١٠٢}
 \end{aligned}$$

## فصل چهارم

# متغیرهای تصادفی

## فصل چهارم

## حل المسائل - مبانی احتمال

۱- دو توب را به تصادف از ظرفی با ۸ توب سفید، ۴ توب سیاه و ۲ توب نارنجی انتخاب می کنیم. فرض کنید برای هر توب سیاه ۲ ریال جایزه و برای هر توب سفید انتخاب شده ۱ ریال جریمه شویم اگر  $X$  نشان دهنده میزان برد باشد مقادیر ممکن  $X$  و احتمال مربوط به هر مقدار را بدست آورید.

$$P(X = -2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{4}{13}, P(X = -1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{1}{1}}{\binom{14}{2}} = \frac{16}{91}$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{91}, P(X = 1) = \frac{32}{91}, P(X = 2) = \frac{8}{91}$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{6}{91}$$

۲- سه تاس را پرتاب می کنیم، فرض کنید تمامی ۲۱۶ نتایج ممکن هم شانس باشند. اگر  $X$  نشان دهنده جمع سه عدد حاصل شده در هر پرتاب باشد، احتمال مقادیری که  $X$  انتخاب میکند را بدست آورید.

$$P(X = 3) = \frac{1}{216}, P(X = 4) = \frac{3}{216}, \dots$$

$$\dots, P(X = 17) = \frac{3}{216}, P(X = 18) = \frac{1}{216}$$

$$P(X = 3) + P(X = 4) + \dots + P(X = 16) + P(X = 17) + P(X = 18) = 1$$

\* - ۲

۳- ۵ مرد و ۵ زن را براساس امتیازی که در یک امتحان کسب می کنند، رتبه بندی می کنیم. فرض کنید هیچ دو امتیازی یکسان نباشد و تمامی ۱۰۵ حالت مختلف رتبه بندی هم شانس باشند. اگر  $x$  نشان دهنده بالاترین رتبه کسب شده توسط یک زن باشد (مثلاً  $x = 1$ ) یعنی اینکه رتبه اول زن است) مطلوب است:

$$P\{X = i\} \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{5}{1} \times 9!}{10!} = \frac{1}{2}, P(X=2) = \frac{5 \times \binom{5}{1} \times 8!}{10!} = \frac{5}{18}$$

$$P(X=3) = \frac{5 \times 4 \times \binom{5}{1} \times 7!}{10!} = \frac{5}{18}, P(X=4) = \frac{5 \times 4 \times 3 \times \binom{5}{1} \times 6!}{10!} = \frac{5}{18}$$

$$P(X=5) = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times \binom{5}{1} \times 5!}{10!} = \frac{5}{252}, P(X=6) = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \binom{5}{1} \times 4!}{10!} = \frac{1}{252}$$

\* ۵- سکه ای را  $n$  مرتبه پرتاب می کنیم ، اگر اختلاف بین تعداد شیرها و تعداد خطها ظاهر شده را با  $X$  نشان دهیم . مقادیر ممکن  $X$  چه هستند؟

$$X = n - 2i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

\* ۶- در مسأله ۵ اگر سکه سالم باشد ، برای  $n$  احتمال مربوط به مقادیر ممکن  $X$  را بدست آورید.

$$P(X=0) = P(X=1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{6}{8}$$

$$P(X=2) = P(X=3) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{2}{8}$$

۷- فرض کنید تاسی را دو مرتبه پرتاب می کنیم . متغیر های تصادفی زیر چه مقادیری را میتوانند اختیار کنند.

الف) بیشترین عددی که در دو پرتاب حاصل می شود.

ب) کمترین عددی که در دو پرتاب حاصل می شود.

ج) مجموع دو عدد حاصل شده.

د) عدد ظاهر شده اولین پرتاب منهای عدد ظاهر شده دومین پرتاب.

الف) ۶ و ۰ و ۱      ب) ۶ و ۲ و ۱

د) ۵ و ۴ و ۰ و ۳ و ۵      ج) ۱۲ و ۰ و ۰ و ۴ و ۵

## فصل چهارم

## حل المسائل - معانی احتمال

-۸- اگر تاس مسئله ۷ سالم باشد، احتمال های مربوطه به معنی های تصادفی قسمت های (الف) تا (د) را بدست آورید.

$$P(X=1) = \frac{1}{36} \quad \text{و} \quad P(X=2) = \frac{3}{36} \quad \text{و} \quad P(X=3) = \frac{5}{36} \quad \text{(الف)}$$

$$P(X=4) = \frac{7}{36} \quad \text{و} \quad P(X=5) = \frac{9}{36} \quad \text{و} \quad P(X=6) = \frac{11}{36}$$

ب) مانند حالت قبل می باشد.

$$P(X=2) = \frac{1}{36} \quad \text{و} \quad P(X=3) = \frac{2}{36} \quad \text{و} \quad P(X=4) = \frac{3}{36} \quad \text{(ج)}$$

$$P(X=5) = \frac{4}{36} \quad \text{و} \quad P(X=6) = \frac{4}{36} \quad \text{و} \quad \dots \quad P(X=12) = \frac{1}{36}$$

$$P(X=-5) = \frac{1}{36} \quad \text{و} \quad P(X=-4) = \frac{2}{36} \quad \text{و} \quad \dots \quad \text{(د)}$$

$$\dots \quad P(X=\cdot) = \frac{6}{36} \quad \text{و} \quad P(X=4) = \frac{2}{36} \quad \text{و} \quad P(X=5) = \frac{1}{36}$$

\* -۹

\* -۱۰

\* -۱۱

\* -۱۲

-۱۳- یک بازاریاب برای فروش کتاب با دونفر و عده ملاقات دارد در ملاقات اول او با احتمال  $2/3$  میتواند کتاب را بفروشد و در ملاقات دوم مستقل از نتیجه ملاقات اول با احتمال  $1/6$  قادر خواهد بود که کتاب را بفروش برساند. هر فروش با شانس برابر می تواند نوع با جلد شومیز و با قیمت ۱۰۰۰ ریال و یا نوع معمولی با قیمت ۵۰۰ ریالی باشد. تابع احتمال میزان کل فروش ( $X$ ) بر حسب ریال را بدست آورید.

$$P(X=\cdot) = (\cdot / 7)(\cdot / 4) = \cdot / 28$$

$$P(X=500) = (\cdot / 2)\left(\frac{1}{2}\right)(\cdot / 4) + (\cdot / 6)\left(\frac{1}{2}\right)(\cdot / 7) = \cdot / 22$$

$$P(X=1000) = (\cdot / 2)\left(\frac{1}{2}\right)(\cdot / 6)\left(\frac{1}{2}\right) + (\cdot / 2)\left(\frac{1}{2}\right)(\cdot / 4) + (\cdot / 6)\left(\frac{1}{2}\right)(\cdot / 7) = \cdot / 215$$

$$P(X=2 \dots) = (0.1/2)(1/6)(1/2) = 0.045$$

$$P(X=15 \dots) = 0.09$$

۱۴ - ۵ عدد متفاوت را به تصادف بین بازیکن های ۱ تا ۵ تقسیم می کنیم و قتنی که دو بازیکن اعداد خود را مقایسه می کنند کسی که عدد بزرگتری دارد برنده محسوب می شود ابتدا بازیکن ۱ و ۲ ، اعداد خود را مقایسه می کنند، سپس برنده آنها با بازیکن شماره ۳ و به همین ترتیب بازی ادامه می یابد. اگر  $X$  نشان دهنده تعداد دفعاتی باشد که بازیکن ۱ برنده است مطلوب است محاسبه:

$$p\{x=i\} \quad i=0, 1, 2, 3, 4$$

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(X=1) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad P(X=2) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{16} \quad \text{و} \quad P(X=4) = \frac{1}{32}$$

\* - ۱۰

\* - ۱۶

۱۷ - فرض کنید که تابع توزیع تجمعی  $X$  بصورت زیر باشد.

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{b}{4} & 0 \leq b \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4} & 1 \leq b \leq 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq b < 3 \\ 1 & b \geq 3 \end{cases}$$

(الف)  $P\{x=i\}$  را بدست آورید

(ب)  $p\left\{\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$  را محاسبه کنید.

$$P(X=1) = P(X \leq 1) - P(X < 1)$$

(الف)

$$= F(1) - \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X < 2) = F(2) - \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X < 2) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) \\ = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$
(ب)

✓ ۱۸ - سکه ای منظم را ۴ مرتبه بطور مستقل پرتاب می کنیم. اگر  $x$  شان دهنده تعداد

شیرهای ظاهر شده باشد.تابع احتمال متغیر تصادفی  $X = x$  را رسم کنید

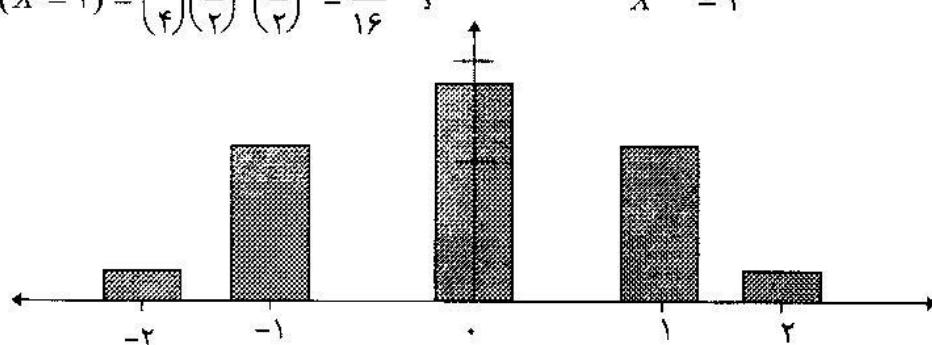
$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad X = -2$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16}, \quad X = -1$$

$$P(X = 0) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}, \quad X = 0$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16}, \quad X = 1$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}, \quad X = 2$$



## حل المسائل - مبانی احتمال

## متغیر های تصادفی

۶۷

۱۹- اگر تابع توان توزیع تجمعی  $X$  بصورت زیر داده شود

$$F(B) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \leq b < 3 \\ \frac{9}{10} & 3 \leq b < 3/5 \\ 1 & b \geq 3/5 \end{cases}$$

تابع احتمال  $X$  را بدست آورید.

$$\begin{aligned} P(X = \cdot) &= P(X \leq \cdot) - P(X < \cdot) = \frac{1}{2}, P(X = 1) = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \\ P(X = 2) &= * \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}, P(X = 3) = \frac{9}{10} - \frac{4}{5} = \frac{1}{10} \\ P(X = 3/5) &= 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

\* - ۲۰

۲۱- چهار اتوبوس که حامل ۱۴۸ دانش آموز از یک مدرسه هستند به یک استادیوم فوتبال وارد می شوند اتوبوسها بر ترتیب حامل ۴۰ و ۳۳ و ۲۵ و ۵۰ دانش آموز هستند یک دانش آموز را به تصادف انتخاب نموده ، فرض کنید.  $x$  نشان دهنده تعداد دانش آموزانی باشد که در اتوبوسی بوده اند که این دانش آموز انتخاب شده است . یکی از چهار راننده را نیز به تصادف انتخاب می کنیم، فرض کنید  $y$  نشان دهنده تعداد دانش آموزان اتوبوس آن راننده باشد.

الف) کدامیک از مقادیر  $E(X)$  و  $E(Y)$  ذکر می کنید بزرگتر هستند ؟ چرا؟

ب) مقادیر  $E(X)$  و  $E(Y)$  را محاسبه کنید.

$$P(X = 4) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{14}{1}} = \frac{4}{14} \quad P(X = 33) = \frac{33}{14}$$

$$P(X = 25) = \frac{25}{14} \quad P(X = 5) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{14}{1}} = \frac{5}{14}$$

$$\sqrt{E(X) = (4)(\frac{4}{14}) + (33)(\frac{33}{14}) + (25)(\frac{25}{14}) + (5)(\frac{5}{14})} \\ = 39 / 2827$$

$$P(Y = 4) = \frac{1}{4}, \quad P(Y = 33) = \frac{1}{4}, \quad p(Y = 25) = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 5) = \frac{1}{4}$$

$$E(Y) = (4)(\frac{1}{4}) + (33)(\frac{1}{4}) + (25)(\frac{1}{4}) + (5)(\frac{1}{4})$$

$$= 37$$

۲۲- فرض کنید، ۲ تیم یک سری مسابقه با یکدیگر مدهند و وقتی که یکی از تیم ها مرتبه برنده شد بازی متوقف گردد. اگر در هر بازی، تیم ۱ با احتمال  $P$  برنده شود، امید ریاضی تعداد بازیها را در حالات (الف)  $2 = 1$  و (ب)  $3 = 1$  دست آورید. همچنین در هر دو

حالت نشان دهد که مقادیر امید ریاضی وقتی حداقل می شوند که  $P = \frac{1}{2}$  باشد.

$$P(X = 2) = \binom{2}{2} P^2 + \binom{2}{1} (1-P)^1 \quad (\text{الف})$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{2} P^2 (1-P) + \binom{3}{1} P (1-P)^2$$

$$E(X) = -\Delta P^2 + \Delta P + 2 \Rightarrow \frac{dE}{dP} = -2P + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{2}}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} P^2 + \binom{3}{3} (1-P)^3 \quad (b)$$

$$P(X=4) = \binom{4}{2} P^2 (1-P)^2 + \binom{4}{4} P^4 (1-P)^2$$

$$P(X=5) = \binom{5}{2} P^2 (1-P)^3 + \binom{5}{3} P^3 (1-P)^2$$

$$E(X) = 18P^2 - 36P^3 + 11P^4 + 7P + 2$$

$$\frac{dE}{dP} = 72P^2 - 108P^3 + 22P + 7 = (P - \frac{1}{2})(72P^2 - 72P - 14) = 0 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

۲۲- در یک جعبه شامل ۵ قطعه الکتریکی میدانیم که دو قطعه معیوب وجود دارد اگر برای کشف قطعات معیوب، آنها را یک به یک و به تصادف آزمایش کیم، امید ریاضی تعداد آزمایش های لازم را بدست آورید.

احتمال اینکه هر دو معیوب در دو انتخاب اول باشند:

$$P(X=2) = \binom{2}{5} \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{10}$$

$$P(X=3) = \binom{2}{5} \left(\frac{2}{4}\right) \left(\frac{1}{3}\right) + \binom{2}{5} \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{10}$$

$$P(X=4) = \binom{2}{5} \left(\frac{2}{4}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) + \binom{2}{5} \left(\frac{2}{4}\right) \left(\frac{3}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) + \binom{2}{5} \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}$$

$$P(X=5) = \binom{2}{5} \left(\frac{2}{4}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{2}\right) + \binom{2}{5} \left(\frac{2}{4}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) + \binom{2}{5} \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \\ + \binom{2}{5} \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{10}$$

$$E(X) = 2\left(\frac{1}{10}\right) + 3\left(\frac{2}{10}\right) + 4\left(\frac{3}{10}\right) + 5\left(\frac{4}{10}\right) = 4$$

\* - ۲۴

\* - ۲۵

\* - ۲۶

## فصل چهارم

۷۰

## حل المسائل - مبانی احتمال

۱۰ درصد مبلغ  $A$  باشد؟

$$P(X = A) = P$$

x = پیشامد مقدار پولی که پرداخت می شود.

$$E(X) = X \cdot P(X) = AP \Rightarrow$$

متوسط پولی که در سال ممکن است پرداخت شود این مبلغ در صورتی تحقق می یابد که هیچ سودی عاید مؤسسه نشود اما اگر بخواهیم

متوسط سود شرکت  $\frac{1}{10}A$  باشد حق بیمه عبارت است از :

$$AP + \frac{1}{10}A = A\left(P + \frac{1}{10}\right)$$

۲۸ - یک نمونه ۳ تایی از قطعات داخل جعبه که شامل ۲۰ قطعه است و ۴ تای آنها

معیوب هستند انتخاب می کنیم. امید ریاضی تعداد قطعات معیوب داخل نمونه را بدست

$$P(X = 0) = \frac{\binom{4}{0} \binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{28}{57}, P(X = 1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{19}$$

آورید.

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{16}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{95}, P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3} \binom{16}{0}}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{1710}$$

$$E(X) = (0)\left(\frac{28}{57}\right) + (1)\left(\frac{1}{19}\right) + (2)\left(\frac{1}{95}\right) + (3)\left(\frac{1}{1710}\right) \approx \frac{3}{5}$$

۳۰ - شخصی یک سکه سالم را آنقدر پرتاپ می کند تا برای اولین مرتبه خط ظاهر شود.

اگر در «امین پرتاپ خط ظاهر شود وی ۲ ریال جایزه می برد فرض کنید  $E[X] = \infty$  نشان دهنده میزان جایزه شخص باشد نشان دهد که

(بارادوکس سنت پترزبورگ) مشهور است.

- الف) آبا مایل هستید که مبلغ یک میلیون ریال برای یک مرتبه انجام این بازی بپردازید؟  
 ب) آبا مایل هستید که مبلغ یک میلیون ریال را برای هر مرتبه بازی بپردازید در صورتیکه تا زمانی که مایل باشید بتوانید بازی را ادامه دهید و فقط زمان توقف را تعیین نمایید.

$$P(X = \cdot) = \frac{1}{2} \quad P(X = 2) = \frac{1}{2} \quad P(X = 2^1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\dots \quad P(X = 2^{N-1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-2} \quad P(X = 2^N) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

$$E(X) = \left(\frac{1}{2}\right) + (2)\left(\frac{1}{2}\right) + (4)\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + 2^N \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\right)$$

$$= 0 + 1 + 1 + \dots + 1 = \infty$$

\* - ۳۱

- ۲۲ - برای بررسی اینکه یک گروه ۱۰۰ نفری دارای بیماری معینی هستند یا خیر آنها را مورد آزمایش خون قرار می‌دهیم بدین ترتیب که آنها را در گروه های ۱۰ نفری تقسیم نموده و نمونه خون هر ۱۰ نفر را با یکدیگر آزمایش می‌کنیم. اگر نتیجه آزمایش منفی باشد یک آزمایش برای این ۱۰ نفر کافی بوده است در حالیکه اگر نتیجه مثبت باشد هر کدام از افراد بطور جداگانه نیز آزمایش می‌شوند و جمماً ۱۱ آزمایش انجام می‌گیرد.  
 فرض کنید احتمال اینکه فردی این بیماری را داشته باشد برای همه افراد بطور مستقل برابر با  $0.1$  باشد. امید ریاضی تعداد آزمایش های لازم برای هر گروه را بدست آورید. (توجه کنید که فرض بر این است که وقتی نتیجه آزمایش مثبت است، حداقل یک نفر دارای بیماری است).

گروه اول را درنظر می‌گیریم و نتایج بدست آمده را در  $10$  ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow P(X) = (0.1)^{10}$$



$$E(X_1) = (1)(1/9)^1 + 1 \left[ 1 - (1/9)^1 \right] = 11 - 1 \cdot (1/9)$$

$$\text{کل } E(X) = 1 \cdot E(X_1) = 11 - 1 \cdot (1/9)$$

\* - ۳۳

\* - ۳۴

- (۲۵) - جعبه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۵ مهره آبی است. دو مهره را به تصادف خارج می‌کنیم. اگر مهره‌ها از یک رنگ باشند آنگاه ۱۱ ریال جایزه می‌گیریم و اگر از رنگ‌های متفاوت باشند ۱ ریال جریمه می‌شویم مطلوب است
- الف) امید ریاضی مبلغی که برنده می‌شویم  
 ب) واریانس مبلغی که برنده می‌شویم

$$p(x=1/1) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{9}$$
الف)

$$p(x=-1) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{9}$$

$$E(X) = (1/1) \left( \frac{4}{9} \right) + \left( \frac{5}{9} \right) (-1) = -\frac{1}{15}$$

$$\text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 1/0.88$$
ب)

- (۲۶) - مساله ۲۲ را با  $i=2$  در نظر بگیرید. واریانس تعداد بازیهایی که باید انجام شود را

بدست آورده و نشان دهید که این عدد وقتی که  $\frac{1}{2} = p$  باشد حداقلتر می‌شود.

$$p(x=2) = \binom{2}{2} P^2 + \binom{2}{1} (1-P)^2$$
( x = تعداد بازی می‌باشد )

$$p(x=3) = \binom{3}{2} P^2 (1-P) + \binom{3}{1} P (1-P)^2$$

$$\begin{aligned}
 E(X) &= -5P^5 + 5P + 2 \\
 E(X^2) &= 5\left[\binom{5}{2}P^2 + \binom{5}{1}(1-P)^2\right] + 9\left[\binom{5}{2}P^2(1-P) + \binom{5}{1}P(1-P)^2\right] \\
 &= -19P^2 + 19P + 4 \\
 \text{var}(x) &= E(x^2) - [E(x)]^2 = 25P^2 - 5 \cdot P^2 - 14P^2 + 39P + 8 \\
 \frac{dV}{dp} &= 10 \cdot p^2 - 10 \cdot p^2 - 28p + 39 = 0 \Rightarrow (p - \frac{1}{2})(10 \cdot p^2 - 10 \cdot p - 28) = 0 \\
 \Rightarrow p &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

مقدار  $Var(Y)$  و  $Var(x)$  را برای متغیرهای  $X$  و  $Y$  داده شده در مسأله ۲۱ بحسب آورید.

بر اساس مسأله ۲۱ داریم:

$$\begin{aligned}
 \text{var}(x) &= E(x^2) - [E(x)]^2 \\
 E(X^2) &= (4 \cdot)^2 \left(\frac{4}{14}\right) + \dots + (5 \cdot)^2 \left(\frac{5}{14}\right) = 1625 / 419 \\
 [E(x)]^2 &= 1542 / 2 \\
 \Rightarrow \boxed{\text{var}(x) = 82 / 2} \\
 \text{var}(y) &= E(y^2) - [E(y)]^2 \\
 E(y^2) &= (4 \cdot)^2 \left(\frac{1}{4}\right) + \dots + (5 \cdot)^2 \left(\frac{1}{4}\right) = 1452 / 5 \\
 [E(y)]^2 &= 1269 \\
 \Rightarrow \boxed{\text{var}(y) = 84 / 5}
 \end{aligned}$$

اگر  $E(X) = 1$  و  $Var(x) = 0$  باشد مطلوب است:

(الف)  $E[(2+X)^2]$   
 (ب)  $Var(4+3X)$

(الف)

$$\text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \Rightarrow E(x^2) = 6$$

$$E[(2+X)^2] = E[4 + 4X + X^2] = 4 + 4(E(x)) + E(x^2)$$

$$= 14 \quad (\text{ب})$$

$$\text{var}(4 + 3X) = \text{var}(4) + 9\text{var}(x) = 0 + 45 = 45$$

✓ - توپی را به تصادف از ظرفی که شامل ۳ توپ سفید و ۲ توپ سیاه است انتخاب می‌کنیم. بعد از انتخاب توپ آن را به ظرف برگردانده و توپ دیگری را انتخاب می‌کنیم. این کار را بطور نامحدود تکرار می‌کنیم. احتمال اینکه از ۴ توپ انتخاب شده اول ۲ توپ سفید باشد را بدست آورید.

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

✓ - در امتحان تستی ۳ جوابی با ۵ سوال، احتمال اینکه دانشجویی با حدس زدن تصادفی پاسخ ها حداقل ۴ سوال را درست پاسخ دهد چقدر است؟

$$P(X \geq 4) = p(x = 4) + p(x = 5)$$

$$= \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{11}{243}$$

✓ - مردی مدعی است که تیز هوشی خارق العاده ای دارد. برای آزمایش کردن او یک سکه منظم را ۱۰ مرتبه پرتاب می‌کنیم و از او می‌خواهیم نتایج را قبل از آزمایش پیش بینی کند. او ۷ نتیجه از ۱۰ نتیجه را درست حدس می‌زند. احتمال اینکه وی بدون داشتن خصوصیت تیز هوشی بتواند چنین پیش بینی را انجام دهد، چقدر است؟

$$f(x) = \binom{10}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 120 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

✓ - فرض کنید موتورهای هواپیما در حال پرواز با احتمال  $(P-1)$  مستقل از یکدیگر خراب می‌شوند. اگر در یک پرواز موفقیت آمیز لازم باشد اکثریت موتورهای هواپیما

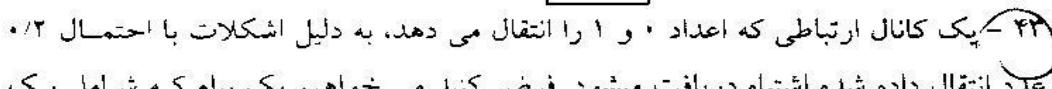
سالم باشد برای چه مقداری از  $p$ ، یک هواپیمای ۵ موتوره، مطمئن‌تر از یک هواپیمای سه موتوره است؟

$$[P(X \geq 2)] \geq [P(X \geq 1)]$$

$$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + \binom{5}{5} p^5 \geq \binom{3}{2} p^2 (1-p) + \binom{3}{3} p^3$$

$$10p^3 - 20p^4 + 10p^5 + 5p^4 - 5p^5 + p^5 \geq 2p^2 - 3p^3 + p^4$$

$$2p^2(p-1)(2p-1) \geq 0 \Rightarrow 2p-1 \geq 0 \Rightarrow p \geq \frac{1}{2}$$

  
پیک کانال ارتباطی که اعداد ۰ و ۱ را انتقال می‌دهد، به دلیل اشکلات با احتمال  $\frac{1}{2}$  عدد انتقال داده شده اشتباه دریافت می‌شود. فرض کنید می‌خواهیم یک پیام که شامل یک عدد دو دویی است را ارسال داریم و برای کاهش شанс اشتباه بجای ۰ عدد ۰۰۰۰۰ و به جای ۱ عدد ۱۱۱۱۱ ارسال گردد. اگر دریافت کننده پیام با استفاده از اکثربت اعداد رسیده آن را بخواند احتمال اینکه پیام اشتباه خوانده شود چقدر است؟ چه فرض استقلالی را در نظر می‌گیرید؟

چون پیام، دو دویی می‌باشد پس اگر عدد اول یا عدد دوم و یا هر دو اشتباه دریافت شوند پیام غلط دریافت شده است لذا:

$X_1$  - پیشامد اینکه صفر اشتباه دریافت شود،  $X_2$  = پیشامد اینکه یک اشتباه دریافت شود.

$$P(X_1 \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$= 1 - \left[ \binom{5}{0} (\cdot/2)^0 (\cdot/\lambda)^5 + \binom{5}{1} (\cdot/2)^1 (\cdot/\lambda)^4 + \binom{5}{2} (\cdot/2)^2 (\cdot/\lambda)^3 \right]$$

$$= 0.058$$

$$P(X_2 \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 0.058$$

احتمال اینکه پیام اشتباه دریافت شود عبارت است از :

$$P(X_1 \cup X_2) = P(X_1) + P(X_2) - P(X_1 \cap X_2)$$

و چون  $X_1$  و  $X_2$  مستقل از یکدیگر هستند داریم:

$$P(X_1 \cup X_2) = P(X_1) + P(X_2) - P(X_1)P(X_2) = 0.1126$$

## فصل چهارم

## حل المسائل - مبانی احتمال

۴۴ - ~~X~~ یک سیستم ماهواره‌ای از  $n$  جزء ساخته شده است که اگر حداقل  $k$  جزء از آنها کار کند، آنگاه سیستم فعال خواهد بود. در یک روز بارانی هر یک از اجزاء مستقل از یکدیگر با احتمال  $p_1$  کار می‌کنند در حالیکه در یک روز غیر بارانی هر کدام مستقل از یکدیگر با احتمال  $p_2$  خواهند کرد. اگر احتمال باران آمدن فردا برابر با  $\alpha$  باشد احتمال اینکه ماهواره کار کند چقدر است؟

$$P(\text{ماهواره کار کند}) = \alpha \left[ \binom{n}{k} p_1^k (1-p_1)^{n-k} \right] + (1-\alpha) \left[ \binom{n}{k} p_2^k (1-p_2)^{n-k} \right]$$

۴۵ - ~~X~~ دانشجویی در حال آماده شده برای شرکت در یک امتحان شفاهی است و از اینکه روز امتحان ((خوش شانس)) یا ((بد شانس)) باشد برایش اهمیت دارد او محاسبه کرده است که در روز خوش شانسی هر یک از امتحان کنندگان بطور مستقل با احتمال  $0.8$  او را قبول می‌کنند و در روز بد شانسی این احتمال به  $0.4$  کاهش می‌یابد فرض کنید که برای قبول شدن بایستی اکثریت ممتحنین او را قبول کند. اگر دانشجو احساس کند که روز امتحان، امکان بدشانس بودن او در برابر خوش شانس بودنش است، آیا بایستی تقاضای امتحانی با ۳ ممتحن و یا تقاضای با ۵ ممتحن را داشته باشد؟

احتمال پذیرفته شدن با سه ممتحن:

$$P(X_3) = \left( \frac{1}{3} \right) \left[ \binom{3}{2} (0.8)^2 (0.2) \right] + \left( \frac{2}{3} \right) \left[ \binom{3}{2} (0.4)^2 (0.6) \right] = 0.32$$

احتمال پذیرفته شدن با پنج ممتحن:

$$P(X_5) = \left( \frac{1}{3} \right) \left[ \binom{5}{2} (0.8)^2 (0.2)^3 \right] + \left( \frac{2}{3} \right) \left[ \binom{5}{2} (0.4)^2 (0.6)^3 \right] = 0.2218$$

چون  $P(x_5) > P(x_3)$  است که باید تقاضای امتحانی با ۵ ممتحن را داشته باشد.

۴۶ - ~~X~~ فرض کنید برای محاکوم کردن یک متهم لازم است که حداقل ۹ نفر از ۱۲ نفر اعضا هیئت منصفه رأی به مجرم بودن او بدهند همچنین فرض کنید احتمال اینکه یک عضو هیئت منصفه متهم گناهکاری را بی گناه تشخیص دهد برابر با  $0.2$  و احتمال اینکه متهم بی گناهی را گناهکار تشخیص دهد برابر با  $0.1$  باشد اگر هر عضو به طور مستقل رأی بدهند

و ۶۵ درصد از متهمین گناهکار باشند ، احتمال اینکه هشت منصفه رأی صحیح بدهد را بدست آورید . چه در صدی از متهمین مجرم شناخته می شوند؟ احتمال اینکه هیأت منصفه رأی صحیح بدهد برابر است با :

$$P(X) = \left[ \binom{12}{9} (0.1)^9 (0.2)^3 + \dots + \binom{12}{12} (0.1)^{12} \right] (0.65) + \\ \left[ \binom{12}{9} (0.1)^9 (0.1)^3 + \dots + \binom{12}{12} (0.1)^{12} \right] (0.35) = 0.9549$$

احتمال مجرم بودن متهمین برابر است با :

$$P(X) = \left[ \binom{12}{9} (0.1)^9 (0.2)^3 + \dots + \binom{12}{12} (0.1)^{12} \right] (0.65) + \left[ \binom{12}{9} (0.1)^9 (0.9)^3 + \dots + \binom{12}{12} (0.1)^{12} (0.9)^3 \right] (0.35) = 0.7945$$

۴۷ - در بعضی از محاکم نظامی ۹ قاضی را دعوت می کنند و کلای مدافع متهم و شاکی می توانند با هر قاضی مبارزه نموده و در صورتیکه با هر قاضی مبارزه نموده و در صورتیکه موفق شوند او از جمع قصاصات کم شده و کسی جایگزین وی نمی شود. در پیشان متهمی را مجرم می شناسند که اکثریت قصاصات رأی به مجرم بودن او بدهد و در غیر این صورت متهم بی گناه شناخته می شود. فرض کنید وقتی که متهم واقعاً مجرم است هر قاضی بطور مستقل با احتمال  $\frac{1}{7}$  رأی به گناهکاری او بدهد و این احتمال برای متهمی که بی گناه است به  $\frac{1}{3}$  کاهش یابد.

الف) احتمال اینکه یک متهم مجرم ، گناهکار تشخیص داده شود را در حالات ۹ قاضی ، ۸ قاضی و ۷ قاضی بدست آورید.

ب) قسمت (الف) را برای یک متهم بی گناه محاسبه کنید.

ج) اگر وکیل مدافع شاکی مجاز به مبارزه با قصاصات نباشد و وکیل مدافع متهم حداقل بتواند با ۲ قاضی مبارزه کند ، چه تعداد مبارزه بایستی بین وکیل مدافع متهم و قصاصات صورت پذیرد در صورتیکه او  $\frac{1}{6}$  درصد اطمینان داشته باشد که متهم گناهکار است؟

A = پیشامد اینکه متهم مجرم ، گناهکار باشد.

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \left[ \binom{9}{0} (0.1)^0 (0.2)^9 + \binom{9}{1} (0.1)^1 (0.2)^8 + \dots + \binom{9}{9} (0.1)^9 \right] + \\
 &\quad \left[ \binom{9}{5} (0.1)^5 (0.2)^4 + \dots + \binom{9}{9} (0.1)^9 \right] = 0.8616 \\
 P(A) &\Rightarrow \left[ \binom{8}{0} (0.1)^0 (0.2)^8 + \dots + \binom{8}{8} (0.1)^8 \right] + \left[ \binom{8}{5} (0.1)^5 (0.2)^3 + \dots + \binom{8}{8} (0.1)^8 \right] \\
 &= 0.8628 \\
 P(A) &\Rightarrow \left[ \binom{7}{0} (0.1)^0 (0.2)^7 + \dots + \binom{7}{7} (0.1)^7 \right] + \left[ \binom{7}{4} (0.1)^4 (0.2)^3 + \dots + \binom{7}{7} (0.1)^7 \right] \\
 &= 0.9174
 \end{aligned}$$

✓ ۴۸ - تجربه نشان داده است که دیسکت های کامپیوتری تولید شده توسط یک شرکت با احتمال ۰/۰۱۰ مستقل از یکدیگر معیوب هستند. شرکت دیسکت ها را در بسته های ۱۰ تایی بفروش می رساند و بیشنهاد باز پرداخت پول را با شرط مشاهده حداقل یک معیوب در هر بسته ارائه می دهد اگر فردی سه بسته از این دیسکت ها را خریداری کند احتمال اینکه او یک بسته را برگرداند چقدر است؟

ابتدا احتمال اینکه یک بسته برگردانده شود را محاسبه می کنیم :

$$\begin{aligned}
 P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\
 &= 1 - \left[ \binom{10}{0} (0.99)^0 + \binom{10}{1} (0.1)(0.99)^9 \right] = 1 - 0.9958 = 0.0042
 \end{aligned}$$

احتمال برگشت یک بسته از سه بسته برابر است با :

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} (0.0042)(0.9958)^2 = 0.0125$$

۴۹ - فرض کنید که ۱۰ درصد از تراشه های کامپیوتری تولید شده، توسط یک شرکت تولید کننده سخت افزار معیوب باشند. اگر ۱۰۰ تراشه سفارش بدھیم، آیا تعداد تراشه های معیوبی را که دریافت میداریم یک متغیر تصادفی دو جمله ای است؟

بله - فرض می کنیم  $X$  تعداد تراشه های معیوب باشد:

$$P(X) = \binom{100}{X} (0.1)^X (0.9)^{100-X}$$

X - ۵۰ - فرض کنید یک سکه از بین p شیر ظاهر شود این سکه را ۱۰ مرتبه پرتاب می کنیم اگر بدانیم که ۶ شیر ظاهر شده است . احتمال شرطی اینکه نتیجه سه پرتاب اول بصورتهای زیر باشد را بدست آورید .

الف) T و H باشد ( یعنی اولین پرتاب شیر ، و دو پرتاب بعدی خط باشند )

ب) T ، H و T باشد .

الف) اگر  $H =$  پیشامد شیر آمدن و  $T =$  پیشامد خط آمدن فرض شود داریم :

$A =$  پیشامد اینکه ۶ تا از ۱۰ تا شیر باشد .

$$P(T, T, H | A) = \frac{\binom{7}{5} P^5 (1-P)^1}{\binom{10}{6} P^6 (1-P)^4} = \frac{1}{10 P (1-P)^4}$$

$$P(T, H, T | A) = \frac{\binom{7}{5} P^5 (1-P)^1}{\binom{10}{6} P^6 (1-P)^4} = \frac{1}{10 P (1-P)^4} \quad (b)$$

✓ ۵۱ - متوسط تعداد اشتباهات تایپی در یک صفحه از یک مجله برابر با ۲ است . احتمال اینکه صفحه بعدی این مجله را که مطالعه می کنید شامل :

الف) صفر اشتباه تایپی باشد ،

ب) ۲ یا بیش از ۲ اشتباه تایپی باشد ،

را بدست آورده ، دلیل خود را شرح دهید !

الف) از توزیع بواسون استفاده می کنیم :

$$\lambda = 2 \Rightarrow P(X = \cdot) = \frac{e^{-2} 2^\cdot}{\cdot!} = e^{-2}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \frac{e^{-2} 2^0}{0!} - \frac{e^{-2} 2^1}{1!} \quad (b)$$

$$= 1 - 3e^{-2}$$

## فصل چهارم

### حل المسائل - مبانی احتمال

۸۰

- ✓ ۵۲ - متوسط تعداد هواپیماهای مسافربری که در ماه چهار حادثه می شوند در سطح جهان برابر با  $\frac{3}{5}$  هواپیما است. احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.
- (الف) در ماه آینده حداقل دو حادثه اتفاق افتد  
 (ب) حداقل یک حادثه در ماه آینده اتفاق افتد  
 دلیل خود را شرح دهید!
- (الف)

$$\lambda = \frac{3}{5} \Rightarrow P(X \geq 2) = 1 - \frac{e^{-\frac{3}{5}} \cdot (\frac{3}{5})^0}{0!} - \frac{e^{-\frac{3}{5}} \cdot (\frac{3}{5})^1}{1!}$$

$$= 1 - e^{-\frac{3}{5}} - (\frac{3}{5})e^{-\frac{3}{5}} = 1 - \frac{4}{5}e^{-\frac{3}{5}}$$

$$P(X \geq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{4}{5}e^{-\frac{3}{5}} \quad (ب)$$

\* - ۵۲ ✓

- ✓ ۵۴ - فرض کنید متوسط تعداد اتومبیل هایی که در هفته در یک بزرگراه متوقف می شوند برابر با  $\frac{2}{2}$  باشد. احتمال پیشامدهای زیر را تقریب بزنید.
- (الف) هیچ اتومبیلی در هفته آینده متوقف نشود.  
 (ب) حداقل ۲ اتومبیل در هفته آینده متوقف شوند.

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\frac{2}{2}} \cdot (\frac{2}{2})^0}{0!} = e^{-\frac{2}{2}} \quad (الف)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \frac{e^{-\frac{2}{2}} \cdot (\frac{2}{2})^0}{0!} - \frac{e^{-\frac{2}{2}} \cdot (\frac{2}{2})^1}{1!} \quad (ب)$$

$$= 1 - \frac{2}{2}e^{-\frac{2}{2}}$$

- ✓ ۵۵ - یک موسسه انتشاراتی ۲ ماشین نویس جدید استخدام می کند. ماشین نویس اول بطور متوسط در هر مقاله ۳ اشتباه و ماشین نویس دوم بطور متوسط  $\frac{4}{2}$  اشتباه تایپی دارند. اگر مقاله شما با شناس برابر توسط یکی از دو ماشین نویس تهیه شود. احتمال اینکه مقاله هیچ غلط تایپی نداشته باشد را بدست آورید.

- A - پیشامد اینکه ماشین نویس اول غلط نداشته باشد.  
 B - پیشامد اینکه ماشین نویس دوم غلط نداشته باشد.

$$P(A) = P(X = \cdot) = \frac{e^{-\tau} (\tau)}{!}, P(B) = \frac{e^{-\tau/2} (\tau/2)}{!} = e^{-\tau/2}$$

پس احتمال اینکه مقاله هیچ غلط تایپی نداشته باشد برابر است با:

$$P(X) = P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B) = ?$$

$$= (e^{-\tau}) \left(\frac{1}{2}\right) + (e^{-\tau/2}) \left(\frac{1}{2}\right) = 0.1032$$

۵۶- چند نفر لازم است تا احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در روز تولد شما بدیا آمده باشد بیش از  $\frac{1}{3}$  گردد؟

$$p(x \geq 1) = 1 - p(X = \cdot) = 1 - \frac{(365) \times \dots \times (365 - n + 1)}{(365)^n}$$

احتمال فوق باید بزرگتر از  $\left(\frac{1}{3}\right)$  باشد لذا داریم:

$$\frac{(365)(364) \dots (365 - n + 1)}{(365)^n} < \frac{1}{2} \Rightarrow n = 365 \log(2) \approx 110$$

۵۷- فرض کنید تعداد حوادثی که در یک بزرگراه در روزاتفاق می‌افتد یک متغیر تصادفی بواسون با پارامتر  $\lambda$  باشد.

الف) احتمال اینکه امروز حداقل ۳ حادثه اتفاق افتد را بدست آورید.

ب) قسمت (الف) را با این فرض که امروز حداقل یک حادثه اتفاق افتاده است تکرار کنید.

(الف)

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = \cdot) = P(X = 1) + P(X = 2) \\ = 1 - \frac{e^{-\lambda} \lambda^1}{1!} - \frac{e^{-\lambda} \lambda^2}{2!} = 1 - \lambda / \Delta e^{-\lambda}$$

(ب)

$$P(X \geq 3) = 1 - P(\cdot < X < 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) \\ = 1 - \frac{e^{-\lambda} \lambda^1}{1!} - \frac{e^{-\lambda} \lambda^2}{2!} = 1 - \lambda / \Delta e^{-\lambda}$$

۵۸- تقریب بواسون را با مقدار صحیح احتمال دو جمله‌ای در حالات زیر مقایسه کنید.

فصل چهارم	٨٢
-----------	----

حل المسائل - مبانی احتمال	
---------------------------	--

$$P\{X = 2\}, n = \lambda, P = \cdot / 1$$

(الف)

$$P\{X = 9\}, n = 10, P = \cdot / 95$$

(ب)

$$P\{X = 0\}, n = 10, P = \cdot / 1$$

(ج)

$$P\{X = 4\}, n = 9, P = \cdot / 2$$

(د)

$$P(X = 2) = \binom{\lambda}{2} (\cdot / 1)^2 (\cdot / 9)^1 = (\cdot / 1488)$$

(الف)

$$\lambda = np = 1 / 1 \Rightarrow P(X = 9) = \frac{e^{-1/1} (\cdot / 1)^9}{9!} = \cdot / 1437$$

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} (\cdot / 95)^9 (\cdot / 0.5)^1 = \cdot / 215$$

(ب)

$$\lambda = np = 9 / 5 \Rightarrow P(X = 9) = \frac{e^{-9/5} (9/5)^9}{9!} = \cdot / 13$$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} (\cdot / 1)^0 (\cdot / 9)^10 = \cdot / 2486$$

(ج)

$$\lambda = np = 1 \Rightarrow P(X = 0) = \frac{e^{-1} (1)^0}{0!} = \cdot / 3678$$

$$P(X = 4) = \binom{9}{4} (\cdot / 2)^4 (\cdot / 1)^5 = \cdot / 0.66$$

(د)

$$\lambda = np \Rightarrow P(X = 4) = \frac{e^{-1/1} (1/1)^4}{4!} = \cdot / 0.72$$

✓ ۵۹ - اگر بلیط شرکت در یک بازی را برای انجام ۵۰ بازی خریداری کنید و در هر بازی.

شанс برنده شدن شما  $\frac{1}{100}$  باشد. احتمال تقریبی برنده شدن را در حالات زیر بدست

آورید.

الف) حداقل یک مرتبه      ب) یک مرتبه      ج) حداقل دو مرتبه

$$\lambda = np = \cdot / 5$$

(الف)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1/5} = \cdot / 3935$$

$$P(X=1) = \frac{e^{-1/5} (1/5)}{1!} = 0.130326 \quad (ب)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 0.0902 \quad (ج)$$

۶۰ - تعداد دفعاتی که یک فرد در سال دچار سرماخوردگی می شود یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر  $\lambda = 5$  است. فرض کنید داروی جدیدی که مقدار زیادی ویتامین C دارد تهیه شده بطوریکه پارامتر پواسون را برای  $75$  درصد جامعه به  $\lambda = 2$  کاهش می دهد و برای بقیه  $25$  درصد هیچ تأثیری ندارد. اگر فردی دارو را استفاده کرده و  $2$  مرتبه سرماخوردگی داشته باشد با چه احتمالی دارو برای او مؤثر بوده است؟

$A$  = پیشامد اینکه دارو مؤثر باشد.  $B$  = پیشامد اینکه فرد دو مرتبه سرماخوردگی داشته باشد.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{(0.168) \left[ \frac{e^{-2} 3^2}{2!} \right]}{(0.168) \left[ \frac{e^{-2} 3^2}{2!} \right] + (0.832) \left[ \frac{e^{-2} 5^2}{2!} \right]} = \frac{0.168}{0.189} = 0.888$$

\* - ۶۱ ✓

\* - ۶۲ ✓

۶۳ - افراد با نرخ  $1$  نفر در هر دو دقیقه وارد یک فروشگاه می شوند.

الف) احتمال اینکه هیچکس در فاصله ساعت  $12:00$  تا  $12:05$  وارد نشود را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه حداقل  $4$  نفر در آن زمان وارد فروشگاه شوند را بدست آورید.

چون در هر دو دقیقه  $1$  نفر وارد فروشگاه می شوند واحد،  $2$  می باشد.

$$P\{N(t) = 0\} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda)^0}{0!} = \frac{e^{-1/2} (1/2)^0}{0!} = 0.1353 \quad (الف)$$

$$P\{N(t) \geq 4\} = 1 - P\{N(t) < 4\} \quad (ب)$$

$$= 1 - e^{-2/5} \frac{(2/5)^1}{1!} - e^{-2/5} \frac{(2/5)^2}{2!} - e^{-2/5} \frac{(2/5)^3}{3!}$$

$$= 0.2424$$

۶۴ - نرخ خودکشی در یک ایالت آمریکا برابر با ۱ خودکشی در هر ۱۰۰۰۰۰ نفر در ماه گزارش شده است.

(الف) احتمال اینکه در یک شهر ۴۰۰۰۰۰ نفری آن ایالت حداقل ۸ خودکشی در ماه اتفاق افتاد را بدست آورید.

- (ب) احتمال اینکه برای حداقل ۲ ماه از سال ، در هر ماه حداقل ۸ خودکشی باشد را بدست آورید.

ج) اگر ماه فعلی را شماره ۱ بنامیم احتمال اینکه اولین ماهی که حداقل  $n$  خودکشی وجود دارد ماه شماره  $i$  ( $i \geq 1$ ) باشد را بدست آورید چه فرضهایی را در نظر گرفته اید؟

با توجه به فرض مسئله  $\frac{1}{100000} = \lambda$  می باشد

$$\lambda t = \frac{400000}{100000} = 4 \Rightarrow P\{N(t) \geq \lambda\} = 1 - p\{N(t) < \lambda\} \quad (\text{الف})$$

$$= 1 - P\{N(t) = 0\} - \dots - P\{N(t) = 7\} = 0.051$$

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{x < 2\} = 1 - p\{x = 0\} - p\{x = 1\} \quad (\text{ب})$$

$$= 1 - \binom{12}{0} (0.051)^0 (0.9489)^12 - \binom{12}{1} (0.051)^1 (0.9489)^11$$

$$= 0.1227$$

۶۵ - هر یک از ۵۰۰ سرباز یک پادگان ، مستقل از یکدیگر با احتمال ۰.۰۰۱ دارای بیماری خاصی هستند این بیماری را می توان با آزمایش خون تشخیص داد و لذا برای سهولت نمونه خون ۵۰۰ سرباز را مخلوط نموده و آزمایش کرده اند.

(الف) احتمال تقریبی اینکه نتیجه آزمایش مثبت باشد ، یعنی حداقل یک نفر دارای بیماری باشد را بدست آورید.

حال فرض کنید که نتیجه آزمایش مثبت است

ب) با این شرط احتمال اینکه بیش از یک نفر بیمار باشند چقدر است؟  
فرض کنید یکی از سربازها می‌داند بیمار است.

ج) بیمار مورد نظر در مورد احتمال اینکه بیش از یک نفر بیمار باشند چه ایده‌ای دارد؟  
چون نتیجه آزمایش خونهای مخلوط شده مثبت است، مسئولین تصمیمی میگیرند که افراد را بطور جداگانه مورد آزمایش قرار دهند و نتیجه اولین (۱-) آزمایش منفی و ۲-امین آزمایش که روی فرد مورد نظر انجام گرفت نتیجه اش مثبت است.  
د) با اطلاعات فوق احتمال اینکه هر یک از افراد باقیمانده دارای بیماری باشند را بصورت تابعی از  $\lambda$  بدست آورید

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{500}{500}\right)(0.999)^{500} \quad (\text{الف})$$

$$= 0.3936$$

$$p\{x > 1 | x > 0\} = \frac{P\{(x > 1) \cap (x > 0)\}}{P(x > 0)} = \frac{P(x > 1)}{P(x > 0)} \quad (\text{ب})$$

$$= \frac{1 - p(x \leq 1)}{1 - p(x = 0)} = 0.229$$

ج) چون خود فرض می‌داند یکی از سربازان بیمار است پس آن را از بقیه جدا کرده و احتمال اینکه حداقل یک نفر دیگر بیمار باشد را محاسبه می‌کنیم:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{499}{500}\right)(0.999)^{499} = 0.393$$

✓ ۶۶ - یک گردونه بازی که شامل ۳۸ عدد بصورت اعداد ۰ تا ۳۶ و عدد ۰۰ (دو صفر) است را در نظر بگیرید. اگر فردی همواره روی یکی از نتایج ۱۰ تا ۱۲ شرط بندی کند، احتمال پیشامد های زیر را بدست آورید.

الف) ۵ شرط اولیه را بیازد.

ب) اولین برد او در چهارمین شرط بندی اتفاق افتاد.

الف) چون احتمال برد  $\left(\frac{12}{38}\right)$  می‌باشد لذا احتمال باخت  $\left(\frac{26}{38}\right)$  است.

$$P(X) = \left( \frac{26}{38} \right)^3 = 0.15 \quad \text{و چون نتایج مستقل از یکدیگر هستند پس:}$$

$$P(X=4) = \binom{12}{3} \left( \frac{26}{38} \right)^3 = 0.1012 \quad \text{ب) بر اساس توزیع هندسی داریم:}$$

۶۷ - دو تیم ورزشی یک سری بازی انجام می دهند و اولین تیمی که ۴ مرتبه برنده می شود بعنوان برنده نهایی انتخاب می شود فرض کنید یکی از تیم ها قوی تر از دیگری است بطوریکه احتمال برد آن در هر بازی مستقل از بازی های دیگر برابر با ۰.۶ است. احتمال اینکه تیم قوی تر بازی را ببرد بدست آورید. این احتمال را برای ۷ و ۶ و ۵ و ۴ = محاسبه کنید احتمال برنده نهایی شدن تیم قوی تر را با احتمال آن تیم ۲ بازی از ۳ بازی را ببرد مقایسه کنید.

$$P(X=i) = \binom{i-1}{4-1} (0.6)^i (0.4)^{4-i}$$

$$P(X=4) = (0.6)^4 (0.4)^0 = 0.1296, p(x=5) = 0.2$$

$$P(X=6) = \binom{5}{2} (0.6)^5 (0.4)^0 = 0.21, p(x=7) = 0.1658$$

$$P(X=7) = \binom{3}{2} (0.6)^3 (0.4)^0 = 0.432 \quad \text{احتمال اینکه ۲ بازی از ۳ بازی را ببرد:}$$

۶۸ - در مساله ۶۷ فرض کنید که دو تیم با هم بازی کرده و احتمال برد هر تیم  $\frac{1}{3}$  باشد در این صورت امید ریاضی تعداد بازیها را بدست آورید.

$$\begin{aligned} E(x) &= (4)p(x=4) + (5)p(x=5) + (6)p(x=6) + (7)p(x=7) \\ &= 4\left[\left(\frac{1}{3}\right)^4\right] + (5)\left[\binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2\right] + \dots + (7)\left[\binom{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2\right] \end{aligned}$$

$$= 2/90625$$

$$E(x) = 5/8125 \quad \text{و اگر بازیها به صورت رفت و برگشت باشد داریم:}$$

۶۹- به خبرنگاری لیست افراد بانفوذی را داده اند که باستی با آنها مصاحبه کند اگر خبرنگار لازم باشد که با ۵ نفر مصاحبه کند و هر فرد بطور مستقل با احتمال  $\frac{2}{3}$  موافقت نماید که با او مصاحبه شود . احتمال اینکه لیست وی قادر به تأمین تعداد افراد مورد نیاز باشد را در هر یک از حالات زیر بدست آورید.

الف) لیست شامل ۵ نفر باشد

ب) لیست شامل ۸ نفر باشد

برای قسمت (ب) احتمال اینکه خبرنگار بتواند باج) ۶ نفر . د) ۷ نفر از افراد لیست مصاحبه کند چقدر است؟

$$P(X=5) = \binom{5}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} \quad \text{الف)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= \binom{8}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \binom{8}{8} \left(\frac{2}{3}\right)^8 \\ &= \frac{4864}{6561} \end{aligned} \quad \text{ب)}$$

۷۰- یک سکه منظم را بطور متوالی پرتاب میکنیم تا شیر برای دهمین مرتبه ظاهر شود اگر نشان دهنده تعداد خط های ظاهر شده باشد .تابع احتمال  $x$  را بدست آورید.

بر اساس توزیع دو جمله ای منفی داریم:

$$P(X=10) = \binom{x-1}{10-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-10} = \binom{x-1}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

۷۱- مساله کبریت بanax (مثال ۵-۹) را وقتی که قوطی کبریت طرف چپ او از ابتدا شامل  $N_1$  چوب کبریت و قوطی کبریت سمت راست او  $N_2$  چوب کبریت را داشته باشد حل کنید. چون در مسأله کبریت بanax فرض بر آن است که در قوطی دوم  $k$  چوب کبریت باشد پس باید در زمانی که  $N_1 + N_2$  امین بار به قوطی سمت چپ مراجعه می شود کبریت تمام شده باشد.

پس بر اساس توزیع دو جمله ای منفی داریم:

## فصل چهارم

## حل المسائل - مبانی احتمال

$$p(x) = \binom{N_r - K + N_i + 1 - 1}{N_i + 1 - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{N_i+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{N_r-K}$$

$$p(x) = \binom{N_r + N_i - K}{N_i} \left(\frac{1}{2}\right)^{N_i+N_r-K+1}$$

و چون احتمال برداشتن از هر یک از دو قوطی یکی است داریم:

$$2p(x) = \binom{N_r + N_i - K}{N_i} \left(\frac{1}{2}\right)^{N_i+N_r-K}$$

۷۲ - در مساله کبریت بanax احتمال اینکه در لحظه‌ای که قوطی اول خالی می‌شود (در مقابل کشف خالی بودن آن)، قوطی دیگر  $k$  چوب کبریت داشته باشد را بدست آورید.  
به مسأله قبل مراجعه شود.

۷۳ - ظرفی شامل ۴ توب سفید و ۴ توب سیاه است به تصادف ۴ توب از ظرف انتخاب می‌کنیم اگر ۲ توب سفید و ۲ توب سیاه باشد، آزمایش را متوقف می‌کنیم در غیر اینصورت توپها را به ظرف برگردانده و دوباره ۴ توب به تصادف انتخاب می‌کنیم این آزمایش آنقدر تکرار می‌شود، تا ۲ توب از ۴ توب سفید باشد احتمال اینکه  $n$  مرتبه انتخاب توپها صورت پذیرد را بدست آورید.

با توجه به توزیع هندسی و فوق هندسی داریم:

$$P = \frac{\binom{4}{2} \binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{36}{70}$$

$$1 - P = \frac{34}{70} \Rightarrow P(X) = \frac{36}{70} \times \left(\frac{34}{70}\right)^{N-1} = \frac{18(17)^{N-1}}{(35)^N}$$

۷۴ - در مسأله ۶۷ احتمال شرطی پیشامد های زیر را برای تیم قوی تر بدست آورید.

الف) برنده نهایی باشد بشرط اینکه تیم قوی تر اولین بازی را ببرد.

ب) اولین بازی را برد باشد بشرط اینکه برنده نهایی شده است.

## حل المسائل - مبانی احتمال

## متغیرهای تصادفی

۸۹

الف)  $A$  = پیشامد اینکه تیم قوی تر برنده نهایی باشد  $B$  = پیشامد اینکه تیم قوی تر بازی اول خود را ببرد.

$$\begin{aligned}
 P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')} \\
 &= \frac{\binom{6}{2}(\cdot/6)^2(\cdot/4)^4}{\binom{6}{2}(\cdot/6)^2(\cdot/4)^4 + \left[ \binom{6}{2}(\cdot/6)^2(\cdot/4)^4 + \binom{6}{1}(\cdot/6)^1(\cdot/4)^5 \right]} = 0.6122 \\
 P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\binom{6}{2}(\cdot/6)^2(\cdot/4)^4}{\binom{7}{4}(\cdot/6)^4(\cdot/4)^3} \quad (b) \\
 &= \frac{20}{21} = 0.9523
 \end{aligned}$$

\*-75

\*-76

۷۷ - یک خریدار قطعات ترانزیستور، انها را در محموله های ۲۰ تایی خریداری میکند سیاست او این است که از هر محموله ۴ قطعه را به تصادف انتخاب کرده و اگر همه آنها سالم باشند محموله را می پذیرد اگر هر قطعه در محموله مستقل از سایر قطعات با احتمال ۱/۰ معیوب باشد چه نسبتی از محموله ها رد می شوند.

احتمال رد شدن برابر است با :

$$p(x \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0}(\cdot/1)(\cdot/9)^4$$

$$p(x \geq 1) = 0.3439$$

## فصل پنجم

متغیرهای تصادفی

پیوسته

## حل المسائل - مبانی احتمال

## متغیرهای تصادفی پیوسته

۹۱

(۱) اگر  $x$  یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)^3 & -1 < x < 1 \\ \text{سایر مقادیر} & \end{cases}$$

الف) مقدار  $c$  را بدست آوریدب) تابع توزیعی تجمعی  $x$  چیست؟

(الف)

$$\int_{-1}^1 C(1-X^3)dx = 1 \Rightarrow C(X - \frac{X^4}{4})|_{-1}^1 = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{4}$$

(ب)

$$F(X) = \int \frac{3}{4}(1-X^3)dx = \frac{3}{4}\left(X - \frac{X^4}{4}\right) = \frac{3}{4}X - \frac{1}{4}X^4$$

$$F(X) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left(X - \frac{X^4}{4}\right) & -1 < X < 1 \\ \cdot & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

(۲) سیستمی شامل یک واحد اصلی به اضافه یک واحد پشتیبان است که میتواند برای یک مدت زمان تصادفی  $x$  کار کند. اگر تابع چگالی  $x$  (بر حسب ماه) بصورت زیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} cx e^{-x/5} & x > 0 \\ \cdot & x \leq 0 \end{cases}$$

احتمال اینکه سیستم حداقل ۵ ماه کار کند چقدر است؟

$$P(X \geq 5) = \int_5^\infty f(x)dx = 1 - \int_0^5 f(x)dx$$

$$\int_0^\infty CXe^{-\frac{x}{5}}dx = 1 \Rightarrow C \int_0^\infty xe^{-\frac{x}{5}}dx = 1$$

$$M = \int_0^\infty Xe^{-\frac{x}{5}}dx \rightarrow \begin{cases} x = u \rightarrow dx = du \\ e^{-\frac{x}{5}}dx = dv \rightarrow -5e^{-\frac{x}{5}} = V \end{cases}$$

$$M = uv - \int vdu = -2xe^{-\frac{x}{5}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-\frac{x}{5}} dx = 4$$

$$\Rightarrow C(4) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

$$P(X \geq 5) = 1 - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{5} xe^{-\frac{x}{5}} dx = 1 - (-2/5 e^{-\frac{x}{5}} + 1)$$

$$P(X \geq 5) = 3/5$$

تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^2) & 0 < x < \frac{5}{2} \\ . & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

آیا از یک تابع چگالی باشد؟ در این صورت،  $c$  را تعیین کنید. مسئله را برای حالتی که  $f(x)$  بصورت زیر است، تکرار کنید.

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^2) & 0 < x < \frac{5}{2} \\ . & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

ابتدا فرض می کنیم  $f$  تابع چگالی باشد در آن صورت:

$$\int_{-\infty}^{5} C(2x - x^2) = 1 \Rightarrow C = -\frac{64}{225}$$

پس تابع عبارت خواهد بود از:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{64}{225}(2X - X^2) & 0 < X < \frac{5}{2} \\ . & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

دیده می شود که به ازای هر  $X$  در بازه  $(\sqrt{2}, 5)$  مقدار تابع منفی میشود که این امر با شروط

تابع چگالی منافات دارد پس  $f(x)$  تابع چگالی نیست.

اثبات برای تابع  $f(x) = \begin{cases} C(2X - X^2), & 0 < X < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{سایر مقدار} \end{cases}$  نیز مانند حالت قبل میباشد.

۴- تابع چگالی طول عمر یک قطعه الکترونیکی (بر حسب ساعت) بصورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 10 \\ 0, & x \leq 10 \end{cases}$$

الف)  $P\{x > 20\}$  را پیدا کنید.

ب) تابع توزیعی تجمعی  $F(x)$  را بدست آورید.

ج) احتمال اینکه از ۶ قطعه الکترونیکی لاقل ۳ تا برای حداقل ۱۵ ساعت کار کنند چقدر است؟ چه فرض هایی را در نظر می گیرید؟

$$P(x > 20) = 1 - P(x \leq 20) \quad \text{(الف)}$$

$$= 1 - \int_{10}^{20} \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \int f(X)dx = \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} \quad \text{(ب)}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x}, & x > 10 \\ 0, & x \leq 10 \end{cases}$$

ج) ابتدا احتمال  $P(X \geq 15)$  را محاسبه میکنیم:

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - \int_{10}^{15} \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

پس احتمال آنکه قطعه ای حداقل ۱۵ ساعت کار کند  $\left(\frac{2}{3}\right)$  میباشد حال از توزیع دو

جمله ای استفاده می کنیم:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = \cdot) - P(X = 1) - P(X = 2) \quad \text{کل} \\ = 1 - \cdot / 1 = \cdot / 9$$

٩٤

## فصل پنجم

## حل المسائل - مبانی احتمال

کم  $\checkmark$  ۵) یک دستگاه پمپ بنزین، دو هفته یک بار بنزین دریافت می کند اگر حجم فروش هفتگی بر حسب هزار گالن یک متغیر با تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x^5) & 0 < x < 1 \\ . & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

حجم مخزن پمپ بنزین چقدر باشد، تا احتمال تمام شدن بنزین در یک هفته معین ۱/۰۱ گردد؟

اگر فرض کنیم:  $X$  = حجم فروش هفتگی،  $D$  = گنجایش مخزن

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-X)^5 & 0 < X < 1 \\ . & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

(حجم مخزن)  $\frac{1}{2}$  = حجم فروش هفتگی آنگاه:

$$P(X > D) = \int_D^1 5(1-X)^5 dx = . / .$$

$$\Rightarrow 5(1-X)^5 \Big|_D^1 = . / . \Rightarrow -5(1-D)^5 = . / .$$

$$\boxed{D = 1/346}$$

۶) اگر تابع چگالی  $x$  بصورت های زیر باشد،  $E(x)$  را محاسبه کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} xe^{-\frac{x}{4}} & x > 0 \\ . & \text{سایر مقادیر} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^5) & -1 < x < 1 \\ . & \text{سایر مقادیر} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x^5} & x > 5 \\ . & x \leq 5 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

(الف)

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx = \frac{1}{4} \int_0^\infty X e^{-\frac{X}{4}} dx$$

## حل المسائل - مبانی احتمال

## متغیرهای تصادفی پیوسته

۹۵

با دوبار استفاده از روش جزء به جزء داریم :

$$E(X) = \frac{1}{4} \left( -16 e^{-\frac{X}{4}} \right)^{\infty} = \frac{1}{4} (16) = 4$$

ب) بر اساس مسئله ۱ داریم :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^4) & -1 < X < 1 \\ . & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-1}^1 x f(x) dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (X - X^4) dx = \frac{3}{4} \left( \frac{X^2}{2} - \frac{X^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = 0$$

(ج)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Delta}{X^4} & X > \Delta \\ . & X \leq \Delta \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{\Delta}^{\infty} x f(x) dx = \int_{\Delta}^{\infty} \frac{\Delta}{X^4} dx = \Delta \ln(X) \Big|_{\Delta}^{\infty} = \infty$$

۷ - تابع چگالی  $x$  بصورت زیر است .

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^4 & -1 \leq x \leq 1 \\ . & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

اگر  $E(x) = \frac{3}{5}$  باشد، مقادیر  $a$  و  $b$  را بدست آورید.

$$E(X) = \int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^1 (ax + bx^4) dx = \frac{a}{2} + \frac{b}{5} = \frac{3}{5}$$

چون  $f(x)$  تابع چگالی است پس :

$$\int_{-1}^1 (a + bx^4) dx = 1 \Rightarrow ax + \frac{bx^5}{5} \Big|_{-1}^1 = 1 \Rightarrow a + \frac{b}{5} = 1$$

$$\begin{cases} 1 \cdot a + 5b = 12 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{6}{5} \end{cases}$$

۸- طول عمر یک لامپ الکترونیکی (بر حسب ساعت) یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر است:

$$f(x) = xe^{-x} x \geq 0$$

متوسط طول عمر چهین لامپ را محاسبه کنید.

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} X e^{-x} dx$$

با دوبار استفاده از روش جزء به جزء داریم :

$$E(X) = -xe^{-x} \Big|_0^{\infty} = 2$$

\* - ۹

۱۰- قطارهایی که عازم مقصد A هستند از ساعت ۷ صبح به فاصله ۱۵ دقیقه به ایستگاه می‌رسند. در حالیکه قطارهای عازم مقصد B از ساعت ۰۵:۰۵ به فاصله ۱۵ دقیقه وارد ایستگاه می‌شوند. (الف) اگر مسافری در زمانی که بطور یکنواخت بین ۷ و ۸ صبح توزیع شده است به ایستگاه برسد و سوار اولین قطاری که وارد ایستگاه می‌گردد بشود، به چه نسبتی وی به مقصد A می‌رود؟

(ب) پاسخ قسمت (الف) را اگر مسافر در زمانی به ایستگاه برسد که بطور یکنواخت بین ۰۵:۰۵ و ۰۷:۰۵ صبح توزیع شده است بدست آورید.

(الف)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & 7 \leq X \leq 8 \\ 0, & \text{سایر مقداریں} \end{cases}$$

چنانچه شخص پس از زمان حرکت قطار عازم مقصد B، وارد ایستگاه شود، سوار قطاری خواهد شد که عازم مقصد A می‌باشد پس :

## حل المسائل - مبانی احتمال

## متغیرهای تصادفی پیوسته

۹۷

$$P = p(5 < x \leq 15) + p(20 < x \leq 30) + p(35 < x \leq 45) + p(50 < x \leq 60)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{5}^{15} \frac{1}{6} dx + \int_{20}^{30} \frac{1}{6} dx + \int_{35}^{45} \frac{1}{6} dx + \int_{50}^{60} \frac{1}{6} dx \\ &= \frac{10 + 10 + 10 + 10}{60} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60} & 5 \leq X \leq 60 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases} \quad (b)$$

مانند حالت الف فرض می کنیم که شخص در فاصله زمانی خروج قطار B تا ورود قطار A وارد ایستگاه شود لذا داریم :

$$P = p(10 \leq x \leq 15) + p(20 < x \leq 30) + p(35 < x \leq 45)$$

$$\begin{aligned} &+ p(50 < x \leq 60) + p(5 < x \leq 10) \\ &= \int_{10}^{15} \frac{1}{6} dx + \int_{20}^{30} \frac{1}{6} dx + \int_{35}^{45} \frac{1}{6} dx + \int_{50}^{60} \frac{1}{6} dx + \int_{5}^{10} \frac{1}{6} dx \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

\*-11

\*-12

۱۳ - شما ساعت ۱۰ صبح به یک ایستگاه اتوبوس می رسید و می دانید که اتوبوس در زمانی که بطور یکنواخت بین ۱۰ و ۲۰:۱۰ است به ایستگاه خواهد رسید.

الف) احتمال اینکه بیش از ۱۰ دقیقه متظر بماند چقدر است؟

ب) اگر در ساعت ۱۵:۱۰ هنوز اتوبوس به ایستگاه نرسیده باشد، احتمال اینکه شما حداقل ۱۰ دقیقه دیگر نیز متظر بمانید چقدر است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 \leq X \leq 30 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$P(X > 10) = 1 - P(0 \leq X \leq 10) = 1 - \int_0^{10} \frac{1}{30} dx = \frac{2}{3}$$

$$p(X \geq 10) = 1 - p(0 \leq x < 10) = 1 - \int_{0}^{10} \frac{1}{15} dx \\ = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
ب)

۱۴ - فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی بکنوخت روى فاصله (۰، ۱۰) باشد،  $E[X^n]$  را با استفاده از گزاره (۱-۲) محاسبه کرده و نتیجه را با تعریف اميد ریاضی مقایسه کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < X < 10 \\ 0 & \text{سایر مقدارها} \end{cases}$$

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$
گزاره (۱-۲)

$$E[X^n] = \int_0^{10} X^n dx = \left[ \frac{X^{n+1}}{n+1} \right]_0^{10} = \frac{10^{n+1}}{n+1}$$

۱۵ - اگر  $X$  یک متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای  $\mu = 10$  و  $\sigma^2 = 26$  باشد، احتمالات زیر را محاسبه کنید.

$p\{x < 8\}$	$p\{4 < x < 16\}$	$p\{x > 5\}$
ج)	ب)	الف)
$p\{x > 16\}$		$p\{x < 20\}$
د)		د)

$$p\{x > 5\} = p\left\{ \frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{5 - 10}{\sqrt{26}} \right\} = P(Z > -\frac{5}{\sqrt{26}})$$

$$= 1 - P(Z < -\frac{5}{\sqrt{26}}) = 0.7967$$
الف)

$$p\{4 < X < 16\} = p\left( \frac{4 - 10}{\sqrt{26}} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{16 - 10}{\sqrt{26}} \right)$$

$$= P(-1 < Z < 1) = 0.6826$$
ب)

$$p\{x < 8\} = p\left\{ \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{8 - 10}{\sqrt{26}} \right\} = P(Z < -0.32)$$
ج)

$$= 0.3747$$

$$p\{x < 20\} = p\left\{ \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{20 - 10}{\sqrt{26}} \right\} = P(Z < 1.67)$$

$$= 0.9525$$
د)

$$P\{X > 16\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\delta} > \frac{16 - 10}{4}\right\} = P(Z > 1) \quad (e)$$

$$= 0.1587$$

۱۶ - میزان باران سالیانه (بر حسب اینچ) در یک ناحیه معین دارای توزیع نرمال با  $\mu = 40$  و  $\sigma = 5$  است احتمال اینکه از امسال برای مدت ۱۰ سال متظر بمانیم تا میزان بارندگی در سال بیش از ۵۰ اینچ باشد را بدست آورید چه فرض هایی را قر نظر می گیرید؟

ابتدا احتمال اینکه بارندگی بیش از ۵۰ اینچ باشد را محاسبه می کنیم:

$$P\{X > 50\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{50 - 40}{5}\right\} = P(Z > 2/5) = 0.0062$$

پس احتمال اینکه بارندگی کوچکتر یا مساوی ۵۰ باشد برابر است با:

$$P(X \leq 50) = 0.9938$$

لذا احتمال اینکه از امسال به مدت ۱۰ سال متظر بمانیم که میزان بارندگی در سال بیش از ۵۰ اینچ باشد.

$$P(A) = \binom{10}{4} (0.0062)^4 (0.9938)^6 = 0.94 \quad \text{نمود}$$

۱۷ - مردی تلاش در زدن هدفی دارد که اگر پرتاب او در محدوده یک اینچی از هدف باشد ۱۰ امتیاز کسب می کند، اگر بین ۱ و ۳ اینچ از هدف باشد ۵ امتیاز و اگر بین ۳ و ۵ اینچ از هدف باشد ۳ امتیاز کسب خواهد کرد اگر فالصه پرتاب از هدف بطور یکنواخت بین ۰ و ۱۰ توزیع شده باشد، متوسط تعداد امتیازها را بدست آورید.

$$P(X = 1) = \int_0^1 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10},$$

$$P(X = 5) = \int_1^3 \frac{1}{10} dx = \frac{2}{10}, \quad P(X = 3) = \int_{-1}^5 \frac{1}{10} dx = \frac{2}{10}$$

$$E(X) = 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) + 5 \cdot \left(\frac{2}{10}\right) + 3 \cdot \left(\frac{2}{10}\right) = 2.6$$

۱۸ - فرض کنید که  $X$  یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۵ است. اگر  $\text{var}(x) = 0.2$  باشد،  $p\{x > 9\} = 0.2$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\delta} > \frac{9-5}{\delta}\right) = 0.2$$

$$P\left(Z > \frac{4}{\delta}\right) = 0.2 \Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{4}{\delta}\right) = 0.2$$

$$\Phi\left(\frac{4}{\delta}\right) = 0.8 \Rightarrow \frac{4}{\delta} = 0.84 \Rightarrow \delta = 4/0.84$$

$$VaR(X) = \delta' = (4/0.84)^2 = 22/0.67$$

۱۹ - اگر  $X$  یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۱۲ و واریانس ۴ باشد. مقدار  $C$  را چنان پیدا کنید که  $p\{x > c\} = 0.1$  گردد.

$$P\left(\frac{x-\mu}{\delta} > \frac{c-12}{2}\right) = 0.1 \Rightarrow p(z > \frac{c-12}{2}) = 0.1$$

$$1 - \Phi\left(\frac{c-12}{2}\right) = 0.1 \Rightarrow \Phi\left(\frac{c-12}{2}\right) = 0.9$$

$$\frac{c-12}{2} = 1/0.84 \Rightarrow C = 14/0.84$$

۲۰ - اگر ۶۵ درصد از جمعیت یک جامعه بزرگ موافق پیشنهاد افزایش مالیات مدرسه باشند، احتمال تقریبی اینکه یک نمونه تصادفی ۱۰۰ نفری شامل موارد زیر باشد چقدر است؟

الف) حداقل ۵۰ نفر موافق پیشنهاد باشند.

ب) بین ۶۰ و ۷۰ نفر موافق پیشنهاد باشند.

ج) کمتر از ۷۵ نفر موافق پیشنهاد باشند.

$$P(X \geq 50) = P\left(\frac{X-nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \geq \frac{50-100(0.65)}{\sqrt{100(0.65)(0.35)}}\right) \quad \text{الف)$$

$$= P(Z \geq -3/14) = 0.9992$$

$$P(60 < X < 70) = P\left(\frac{60-100(0.65)}{\sqrt{100(0.65)(0.35)}} < Z < \frac{70-100(0.65)}{\sqrt{100(0.65)(0.35)}}\right) \quad \text{ب)}$$

$$\begin{aligned}
 &= P(-1/15 < Z < 1/15) = 0.7498 \\
 P(X < 75) &= P\left(\frac{X - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} < \frac{75 - 100(0.65)}{\sqrt{100(0.65)(0.35)}}\right) \\
 &= P(Z < 1.09) = 0.9767
 \end{aligned} \tag{ج}$$

✓ ۲۱ - فرض کنید طول قد (بر حسب اینچ) مردان ۲۵ ساله یک متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای  $\mu = 6/25$ ,  $\sigma^2 = 6/25$  است. چه درصدی از مردان ۲۵ ساله بیشتر از ۶ فوت و ۲ اینچ قد دارند؟

چند درصد از مردان بلند تر از ۶ فوت بیش از ۶ فوت و ۵ اینچ قد دارند؟

با توجه به اینکه هر فوت ۱۲ اینچ است داریم:

$$P(X > 74) = P\left(\frac{X - \mu}{\delta} > \frac{74 - 75}{2/5}\right) = P(Z > 1/2) = 0.1151 \quad \text{قسمت اول)}$$

درصد مورد نظر عبارتست از: ۱۱/۰

قسمت دوم) ابتدا باید درصد افراد بالای ۶ فوت را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}
 P(X > 72) &= P\left(\frac{X - \mu}{\delta} > \frac{72 - 75}{2/5}\right) = P(Z > -0.15) \\
 &= 0.3446
 \end{aligned}$$

سپس با محاسبه درصد افراد افزای ۶ فوت و ۵ اینچ داریم:

$$\begin{aligned}
 P(X > 77) &= P\left(\frac{X - \mu}{\delta} > \frac{77 - 75}{2/5}\right) = P(Z > 2/4) \\
 &= 0.0082
 \end{aligned}$$

لذا درصد مورد نظر عبارت است از:

$$\frac{0.0082}{0.3446} \times 100 = 2.38\%$$

## فصل پنجم

## حل المسائل - مبانی احتمال

✓ ۲۲ - بهنای قالب‌های میله‌های آلومینیمی (بر حسب ایسج) دارای توزیع نرمال با  $\mu = ۰/۹۰۰۰$  و  $\sigma = ۰/۰۰۳۰$  است. اگر حد محار تعیین شده برای بهنای قالبها برابر با  $۰/۹۰۰۵ \pm ۰/۰۰۵۰$  باشد.

الف) چه درصدی از قالبها معیوب هستند؟

ب) حد اکثر مقدار مجاز  $\sigma$  که باعث شدن شود بیشتر از ۱ معیوب در ۱۰۰ قالب داشته باشیم چقدر است.

الف) ابتدا احتمال سالم بودن قالبها را محاسبه می‌کنیم

$$P(۰/۸۹۵ \leq X \leq ۰/۹۰۵) = P\left(\frac{۰/۸۹۵ - ۰/۹}{۰/۰۰۳} \leq Z \leq \frac{۰/۹۰۵ - ۰/۹}{۰/۰۰۳}\right)$$

$$= P(-۱/۶۷ \leq Z \leq ۱/۶۷) = ۰/۹۰۵$$

پس احتمال معیوب بودن قالبها برابر است با :

$$P(X') = ۱ - ۰/۹۰۵ = ۰/۰۹۵$$

لذا درصد مورد نظر عبارت است از :

$$۰/۰۹۵ \times ۱۰۰ = ۹/۵\%$$

ب) تعبیر دیگر این مسأله آن است که می خواهیم ۹۹٪ قالبها سالم باشند پس داریم:

$$P(۰/۸۹۵ \leq X \leq ۰/۹۰۵) = ۰/۹۹ \Rightarrow P\left(\frac{-۰/۰۰۵}{\delta} \leq Z \leq \frac{۰/۰۰۵}{\delta}\right) = ۰/۹۹$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{۰/۰۰۵}{\delta}\right) - \Phi\left(\frac{-۰/۰۰۵}{\delta}\right) = ۰/۹۹ \Rightarrow \Phi\left(\frac{۰/۰۰۵}{\delta}\right) = ۰/۹۹۵$$

$$\Rightarrow \frac{۰/۰۰۵}{\delta} = ۲/۵۸ \Rightarrow \delta = \frac{۰/۰۰۵}{۲/۵۸} = ۰/۰۰۱۹۳۸ \approx ۱/۹ \times ۱۰^{-۴}$$

✓ ۲۳ - یک تاس سالم هزار بار پرتاپ می‌شود. احتمال اینکه عدد ۶ بین ۱۵۰ تا ۲۰۰ مرتبه مشاهده شود را با تقریب بدست آورید. اگر عدد ۶ دقیقاً ۲۰۰ مرتبه مشاهده شود، احتمال اینکه عدد ۵ کمتر از ۱۵۰ مرتبه مشاهده گردد را بدست آورید.

$$P(۱۵۰ < X < ۲۰۰) = P\left(\frac{۱۴۹/۵ - ۱۰۰ - \frac{۱}{۶}}{\sqrt{۱ + \left(\frac{۱}{۶}\right)\left(\frac{۵}{۶}\right)}} < Z < \frac{۲۰۰/۵ - ۱۰۰ - \left(\frac{۱}{۶}\right)}{\sqrt{۱ + \left(\frac{۱}{۶}\right)\left(\frac{۵}{۶}\right)}}\right)$$

قسمت اول)

$$= P(1/46 < Z < 2/87) = 0.9258$$

$$P(X < 150) = P(X \leq 149/5)$$

قسمت دوم )

$$= P\left(\frac{X - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \leq \frac{149/5 - 150 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)}{\sqrt{150 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)}}\right) = P(Z \leq -0.92) = 0.1762$$

✓ ۲۴ - طول عمر تراشه های تولید شده توسط یک کارخانه تولید قطعات الکترونیکی دارای

توزیع نرمال با پارامترهای  $\mu = 1/4 \times 10^6$  و  $\sigma = 3 \times 10^5$  (بر حسب ساعت) است.

احتمال تقریبی اینکه یک بسته ۱۰۰ تایی از این تراشه ها شامل ۲۰ تراشه که طول عمرشان کمتر از  $1/8 \times 10^6$  را بدست آورید.

ابتدا احتمال تراشه ای را محاسبه میکنیم که طول عمر آن کمتر از  $1/8 \times 10^6$  می باشد.

$$P(X < 1/8 \times 10^6) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{1/8 \times 10^6 - 1/4 \times 10^6}{3 \times 10^5}\right)$$

$$= P(Z < 1/33) = 0.6293$$

حال از توزیع دو جمله ای استفاده می کنیم .

$$P(X = 20) = \binom{100}{20} (0.6293)^{20} (0.3707)^{80} = 1/69 \times 10^{-18}$$

\*-۲۵

✓ ۲۶ - دو نوع سکه در کارخانه ای تولید می شود یکی سالم و دیگری اریب که ۵۵ درصد از موقع شیر می آید یکی از این سکه ها در اختیار ما است اما بیم داریم که سکه سالم با اریب است . برای تحقیق اینکه کدامیک از دو سکه را در اختیار داریم آزمون آماری زیر را انجام می دهیم : سکه را ۱۰۰۰ مرتبه پرتاب کرده اگر حداقل ۵۲۵ مرتبه شیر مشاهده شود ، آنگاه نتیجه می گیریم که سکه سالم است ولی اگر کمتر از ۵۲۵ مرتبه شیر مشاهده شود ، آنگاه نتیجه می گیریم که سکه سالم است . اگر سکه واقعاً سالم باشد ، احتمال اینکه به نتیجه غلط برسیم چقدر است؟ اگر سکه اریب باشد یاسخ چیست؟

١٠٤

## فصل پنجم

## حل المسائل - مبانی احتمال

$$P(X < 525) = P(X \leq 524/5) \quad (\text{قسمت اول})$$

$$= P\left(\frac{X - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \leq \frac{524/5 - 100(0/5)}{\sqrt{100(0/5)(0/5)}}\right) = P(Z \leq 1/55)$$

$$= 0.9394$$

احتمال اینکه به نتیجه درست برسیم :

پس احتمال اینکه به نتیجه غلط برسیم برابر است با :

$$P(A) = 1 - 0.9394 = 0.0606$$

$$P(X \geq 525) = 1 - P(X \leq 524/5) \quad (\text{قسمت دوم})$$

$$= 1 - P\left(\frac{X - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \leq \frac{524/5 - 100(0/55)}{\sqrt{100(0/55)(0/45)}}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq -1/62) = 0.9474$$

احتمال اینکه به نتیجه غلط برسیم برابر است با :

$$P(A) = 1 - 0.9474 = 0.0526$$

\*-۲۷

\*-۲۸

\*-۲۹

۲۰ - مدت زمانی که لازم است تا یک ماشین را تعمیر کنیم (بر حسب ساعت). دارای

توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda = \frac{1}{2}$  است.

الف) احتمال اینکه مدت تعمیر بیش از ۲ ساعت طول کشد را بدست آورید.

ب) احتمال شرطی اینکه زمان تعمیر حداقل ۱۰ ساعت طول بکشد بشرط اینکه بیش از ۹ ساعت از زمان تعمیر گذشته باشد را بدست آورید.

$$P(X > 2) = \int_{\frac{1}{2} \cdot 2}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = -e^{-\frac{1}{2}x} \Big|_{\frac{1}{2} \cdot 2}^{\infty} = e^{-1} \quad (\text{الف})$$

$$\underbrace{P(X \geq 10 | X > 9)}_{*} = P(X > 1) = \int_{\frac{1}{2} \cdot 1}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = -e^{-\frac{1}{2}x} \Big|_{\frac{1}{2} \cdot 1}^{\infty} = e^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{ب})$$

\* (۵)

- ۲۱ - طول عمر یک رادیو برحسب سال دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\frac{1}{\lambda} = \lambda$  است. اگر فردی یک رادیو دست دوم خریداری کند، احتمال اینکه ۸ سال دیگر کار کند چقدر است؟

$$P(X > \lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} dx = -e^{-\frac{1}{\lambda}x} \Big|_{\lambda}^{\infty} = e^{-1}$$

- ۲۲ - فردی ادعا می کند، کل مسافتی که (بر حسب هزار مایل) می تواند یک اتومبیل طی کند قبل از اینکه نیاز به تعمیر داشته باشد یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر  $\frac{1}{\lambda} = \lambda$  است. فرد دیگری ماشین دست دومی دارد که ادعا می کند فقط ۱۰۰۰۰ مایل کار کرده است. اگر فرد اول ماشین را خریداری کند، احتمال اینکه او حداقل ۲۰۰۰۰ مایل دیگر بتواند استفاده کند چقدر است؟

مسئله را با فرض اینکه طول عمر ماشین بر اساس مسافت طی شده دارای توزیع نمایی نبوده بلکه دارای توزیع بکنوخت (بر حسب هزار مایل) روی فاصله (۰ و ۴۰) باشد تکرار کنید.

قسمت اول )

$$P(X \geq 20) = \int_{20}^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} dx = -e^{-\frac{1}{\lambda}x} \Big|_{20}^{\infty} = e^{-1} = -e^{-\frac{1}{\lambda}x} \Big|_{20}^{\infty} = e^{-1}$$

قسمت دوم ) چون ۱۰۰۰۰ مایل را طی کرده است توزیع روی فاصله (۰ و ۲۰)

خواهد بود.

$$P(X \geq 20) = \int_{20}^{\infty} \frac{1}{\lambda} dx = \frac{1}{\lambda}$$

- ۲۳ - نرخ ابتلا به بیماری سرطان ریه برای یک مرد سیگاری ۱ ساله بصورت زیر است:
- $$\lambda(t) = 0.027 + 0.00025(t - 40)^2 \quad t \geq 40$$

۱۰۶

## فصل پنجم

## حل المسائل - مبانی احتمال

با فرض اینکه یک مرد ۴۰ ساله سیگاری از سایر خطرات دیگر مصون باشد. احتمال اینکه او تا سن (الف) ۵۰ سالگی، (ب) ۶۰ سالگی بدون ابتلا به سرطان زنده بماند چقدر است؟

با توجه به اینکه  $\lambda(t)$  نرخ ابتلا به بیماری سرطان (نرخ خرابی) می‌باشد، احتمال ابتلا به بیماری سرطان برابر است با:

$$P(X) = \lambda(t)$$

(الف)  $A$  = پیشامد ابتلا به بیماری،  $B$  = پیشامد زنده ماندن بدون ابتلا به سرطان

$$\begin{aligned} P(A|40 < t \leq 50) &= 1 - \exp \left\{ - \int_{40}^{50} (0.027 + 0.00025(t-40)^2) dt \right\} \\ &= 1 - \exp \left\{ - (0.027t + \frac{0.00025}{3}(t-40)^3) \Big|_{40}^{50} \right\}. \end{aligned}$$

$$P(B) = 1 - 0.58 = 0.42$$

(ب)  $C$  = پیشامد زنده ماندن بدون ابتلا به بیماری

$$\begin{aligned} P(A|40 < t \leq 60) &= 1 - \exp \left\{ - \int_{40}^{60} (0.027 + 0.00025(t-40)^2) dt \right\} \\ &= 1 - \exp(-1/206) = 0.7 \end{aligned}$$

$$P(C) = 1 - 0.7 = 0.3$$

(الف) فرض کنید توزیع طول عمر قطعه‌ای دارای تابع نرخ خرابی  $\lambda(t) = t^2$  است (بر حسب سال) احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

(الف) طول عمر قطعه ۲ سال می‌باشد.

(ب) طول عمر قطعه بین  $1/4$  تا  $1/2$  سال باشد.

(ج) قطعه یک سال کارکرده با چه احتمالی تا ۲ سال کار می‌کند.

$$P(0 < t \leq 2) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^2 t^2 dt \right\} \quad (الف) ۳۴$$

$$= 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{t^r}{\tau} \right) \right\} = 1 - e^{-t^r/\tau} = 0.982$$

$$P(0.4 < t < 1.4) = 1 - \exp \left\{ - \int_{0.4}^{1.4} t^r dt \right\} \quad (ب)$$

$$= 1 - e^{-0.285} = 0.615$$

$$P(1 < t \leq 2) = 1 - \exp \left\{ - \int_1^2 t^r dt \right\} \quad (ج)$$

$$= 1 - e^{-0.235} = 0.9765$$

✓ ٣٥ - اگر  $X$  به طور یکنواخت روی فاصله  $(-1, 1)$  توضیع شده باشد، مطلوب است :

$$P\left\{|X| > \frac{1}{2}\right\}$$

ب)تابع چگالی متغير تصادفي  $|X|$

$$P\left\{|X| > \frac{1}{2}\right\} = 1 - P\left\{|X| < \frac{1}{2}\right\} \quad (\text{الف})$$

$$= 1 - P\left\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right\} = 1 - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-(-1)} dx$$

$$= 1 - \left[ \frac{1}{2} X \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\} = P\{-y \leq X \leq y\} \quad (ب)$$

$$= F_x(y) - F_x(-y) = F_y(y)$$

$$F_x(y) = \int_{-1}^y \frac{1}{2} dx = \frac{y}{2} \quad \Rightarrow F_x(y) - F_x(-y)$$

$$F_x(-y) = \int_{-y}^{-1} \frac{1}{2} dx = -\frac{y}{2}$$

$$= y$$

$$F_y(y) = y \Rightarrow f_y(y) = \frac{dF_y(y)}{dy}$$

$$\Rightarrow f_y(y) = 1$$

۳۶ - اگر  $y$  بطور یکنواخت روی فاصله  $(-5, 0)$  توزیع شده باشد، احتمال، اینکه هر دو ریشه معادله  $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$  حقیقی باشند چقدر است؟

چون باید دوریشه حقیقی داشته باشد لذا باید :

$$\Delta = B^2 - 4AC = (4y)^2 - 4(4)(y+2) > 0 \Rightarrow 16(y-2)(y+1) >$$

پس احتمال مورد نظر عبارت است از :

$$P(2 < y < 5) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{5}} \frac{1}{4} dx = \frac{3}{5}$$

۳۷ - اگر  $X$  یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر  $\lambda$  باشد، تابع چگالی متغیر تصادفی  $Y = \log X$  را محاسبه کنید.

$$P(Y \leq y) = P(\log x \leq y) = P(X \leq e^y) = Fy(y)$$

$$= F_x(e^y)$$

$$F_x(e^y) = \int_0^{e^y} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{e^y} = -e^{-e^y} +$$

$$Fy(y) = 1 - e^{-e^y} \Rightarrow fy(y) = \frac{dfy(y)}{dy} = e^y (\ln e^y) e^{-e^y}$$

۳۸ - اگر  $X$  بطور یکنواخت روی فاصله  $(1, 0)$  توزیع شده باشد، تابع چگالی  $Y = e^x$  را بدست آورید.

$$P(Y \leq y) = P(e^x \leq y) = P(X \leq \ln y)$$

$$= F_x(\ln y) = Fy(y)$$

$$F_x(\ln y) = \int_0^{\ln y} \left( \frac{1}{1-x} \right) dx = \ln y = Fy(y)$$

$$fy(y) = \frac{dfy(y)}{dy} = \frac{1}{y}$$

*Sheldon Ross*

# **A First Course in Probability**

[www.sem-eng.com](http://www.sem-eng.com)

شمارک: ۳-۲۸-۷۳۰۷-۹۶۴

شبکه آموزشی - پژوهشی مادسیج  
با هدف بهبود پیشرفت علمی  
و دسترسی راحت به اطلاعات  
برای جامعه بزرگ علمی ایران  
ایجاد شده است



**madsg.com**  
**مادسیج**

**IRan Education & Research NETwork  
(IERNET)**

